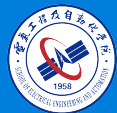




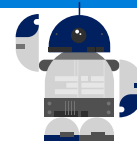
江苏师范大学
JIANGSU NORMAL UNIVERSITY



电气工程及自动化学院
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND AUTOMATION

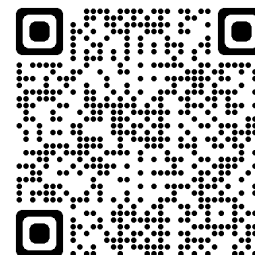


电路
分析



第3章 电路定理

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | <https://sslic.cn/cs>





本章内容

- 叠加定理
- 戴维南定理
- 诺顿定理
- 最大功率传输定理



§3.1 叠加定理

线性电阻电路的电压与电流的关系是以电压与电流为变量的一组线性代数方程，求解这些电路方程得到的各支路电压和电流（输出或响应）是独立电源 u_s 和 i_s 的线性函数。电路响应与激励之间的这种线性关系称为**齐次性**和**叠加性**。

3.1 叠加定理

■ 引例

✧ 激励： i_s 、 u_s

✧ 响应： i_1 、 i_2 、 i_3 、 u

✧ 设网孔电流： i_1 、 i_3

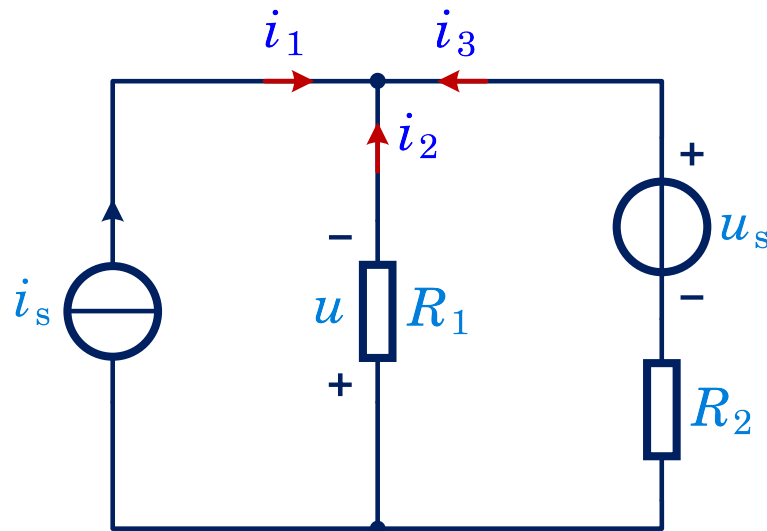
✧ 列网孔电流方程

$$\begin{cases} i_1 = i_s \\ R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_3 = u_s \end{cases}$$

✧ 求解

$$i_1 = i_s = 0u_s + 1i_s = a_1 u_s + b_1 i_s$$

$$i_3 = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s + \frac{-R_1}{R_1 + R_2} i_s = a_3 u_s + b_3 i_s$$

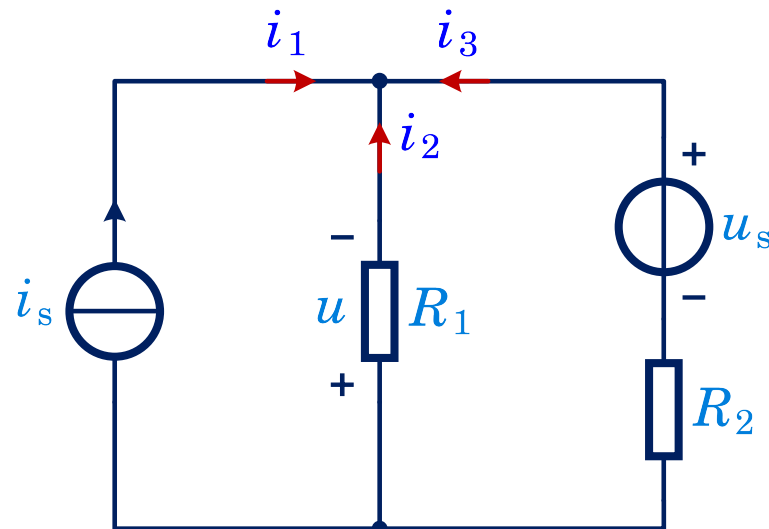




3.1 叠加定理

■ 引例

- ✧ 激励： i_s 、 u_s
- ✧ 响应： i_1 、 i_2 、 i_3 、 u
- ✧ 设网孔电流： i_1 、 i_3
- ✧ 求解



$$i_1 = i_s = 0u_s + 1i_s = a_1u_s + b_1i_s$$

$$i_2 = -(i_1 + i_3) = \frac{-1}{R_1 + R_2}u_s + \frac{-R_2}{R_1 + R_2}i_s = a_2u_s + b_2i_s$$

$$i_3 = \frac{1}{R_1 + R_2}u_s + \frac{-R_1}{R_1 + R_2}i_s = a_3u_s + b_3i_s$$

$$u = R_1i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_s + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_s = a_4u_s + b_4i_s$$

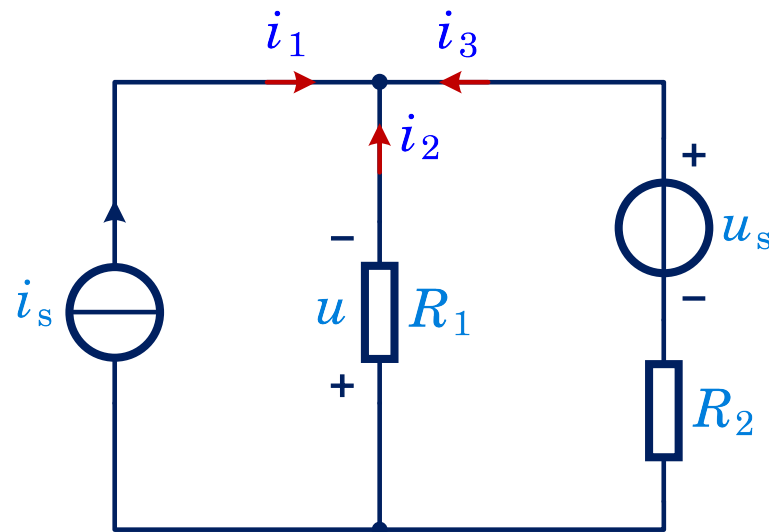


$$\begin{aligned} i_1 &= a_1u_s + b_1i_s \\ i_2 &= a_2u_s + b_2i_s \\ i_3 &= a_3u_s + b_3i_s \\ u &= a_4u_s + b_4i_s \end{aligned}$$

3.1 叠加定理

■ 引例

- ✧ 激励： i_s 、 u_s
- ✧ 响应： i_1 、 i_2 、 i_3 、 u
- ✧ 设网孔电流： i_1 、 i_3
- ✧ 求解



$$i_1 = a_1 u_s + b_1 i_s$$

$$i_2 = a_2 u_s + b_2 i_s$$

$$i_3 = a_3 u_s + b_3 i_s$$

$$u = a_4 u_s + b_4 i_s$$



响应和激励成线性关系（是激励的线性组合）

- 当只有一个激励时，响应与激励成正比 **齐次性**
- 记 $i'_1 = a_1 u_s$ ， $i''_1 = b_1 i_s$ ，则 $i_1 = i'_1 + i''_1$ **叠加性**



3.1 叠加定理

■ 叠加定理

✧ 多个独立电源共同作用的线性电路中，任一支路的电流/电压都等于每一个独立电源单独作用时，在该支路上产生的电流/电压的代数和

■ 重要说明

- ① 叠加定理只适用于线性电路
- ② 当考虑一个独立电源单独作用时，将其余独立电源置零
 - 独立电压源短路（电压置零），独立电流源开路（电流置零）
- ③ 功率计算不能用叠加定理（功率 = 电压 × 电流，非线性关系）
- ④ 总量 = 分量代数和（注意总电路和分电路中的参考方向）
- ⑤ 受控源不要单独作用（受电路结构和元件参数约束）
- ⑥ 分析时不限于分别取几个独立电源



3.1 叠加定理

■ 基本步骤

- ① 画每个独立电源单独作用时的分电路图，标出分量及参考方向
- ② 在分电路图中求分量
- ③ 叠加

3.1 叠加定理

例3-1

例 图示电路中，已知 $i_s = 12\text{A}$ ， $u = 4\text{V}$ ，求电压 $u = 6\text{V}$ 时，电流 i_s 的值。

解 (1) 仅含一个激励电流源

根据齐次性

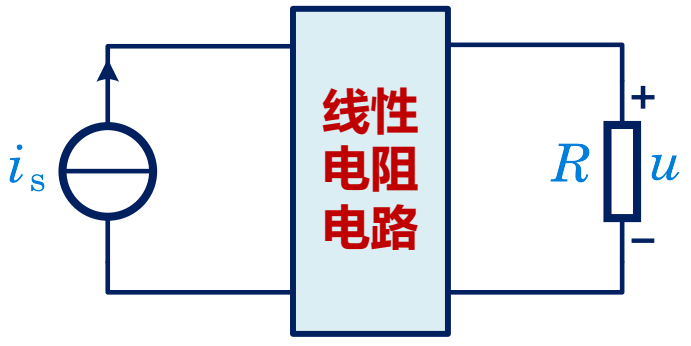
$\Rightarrow u$ 与 i_s 成正比

$$\Rightarrow u = k i_s \Rightarrow 4 = 12k$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

(2) 当 $u = 6\text{V}$ 时

$$i_s = \frac{u}{k} = 18\text{A}$$



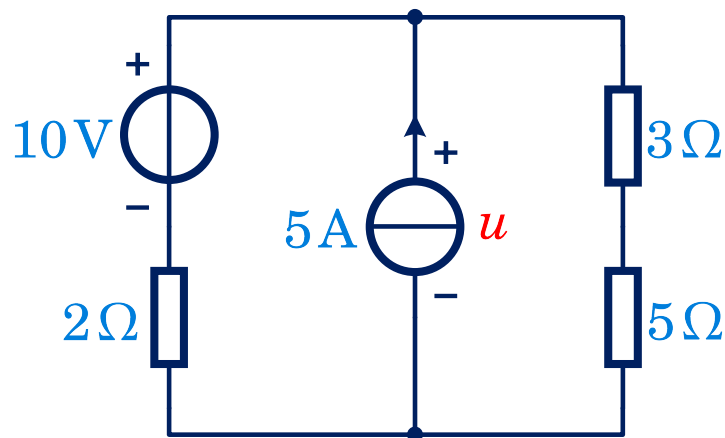


3.1 叠加定理

例3-2

例 利用叠加定理计算图示电路的电压 u 。

解 (1) 画电路图，标出分量
电流源开路，电压源短路



总电路图



3.1 叠加定理

例3-2

例 利用叠加定理计算图示电路的电压 u 。

解 (1) 画电路图，标出分量
电流源开路，电压源短路

(2) 电压源激励时

$$u' = \frac{3+5}{3+5+2} \times 10V = 8V$$

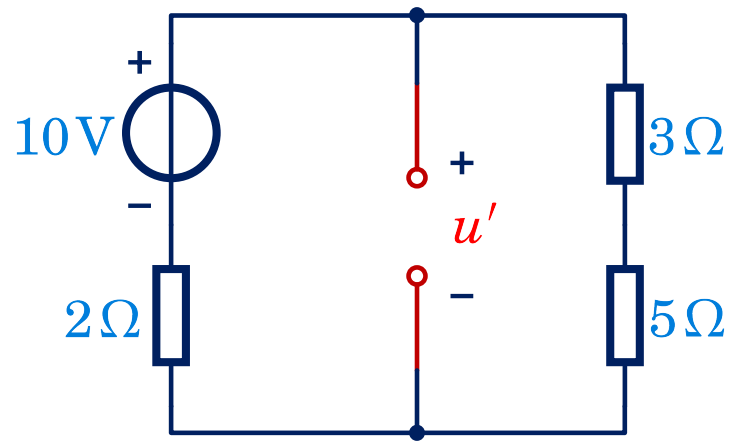
电流源激励时

$$R_{eq} = (3+5) // 2\Omega = 1.6\Omega$$

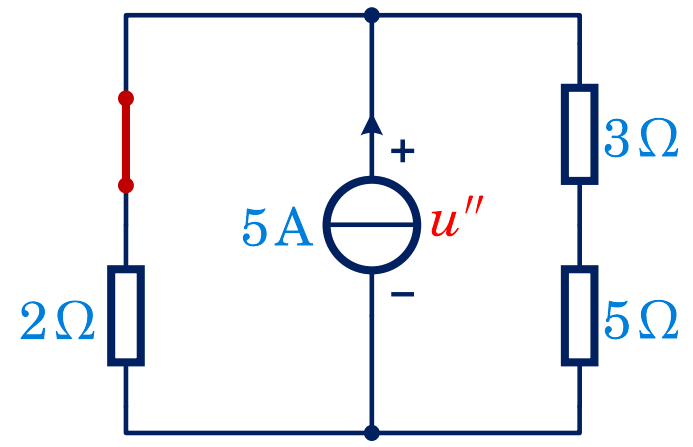
$$u'' = R_{eq} \times 5 = 8V$$

(3) 分量叠加

$$u = u' + u'' = 16V$$



分电路图：电压源激励



分电路图：电流源激励

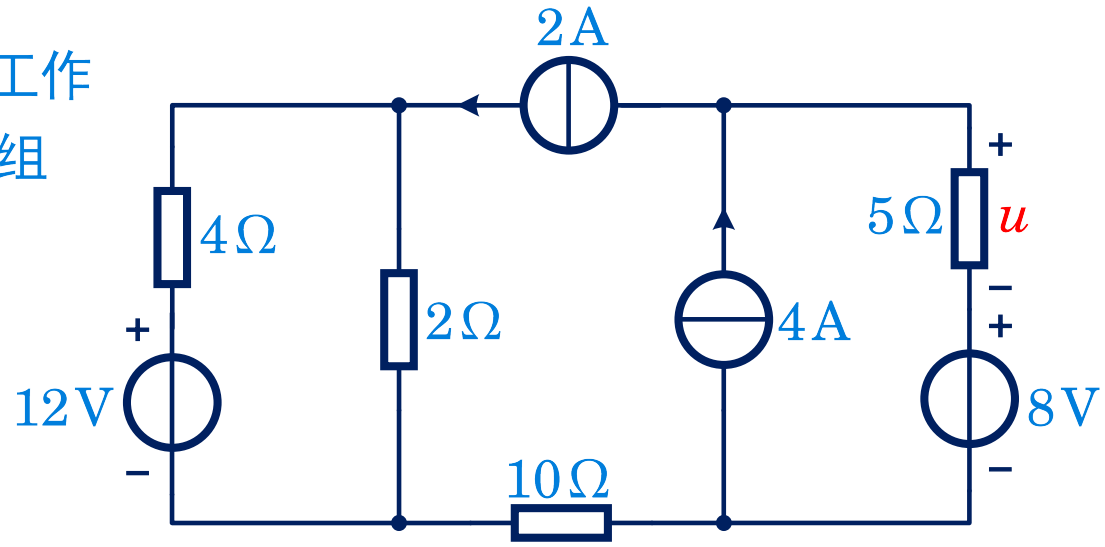


3.1 叠加定理

例3-3

例 利用叠加定理计算图示电路的电压 u 。

解 (1) 让 2A 的电流源单独工作
其他电源工作为另一组
画电路图，标出分量



3.1 叠加定理

例3-3

例 利用叠加定理计算图示电路的电压 u 。

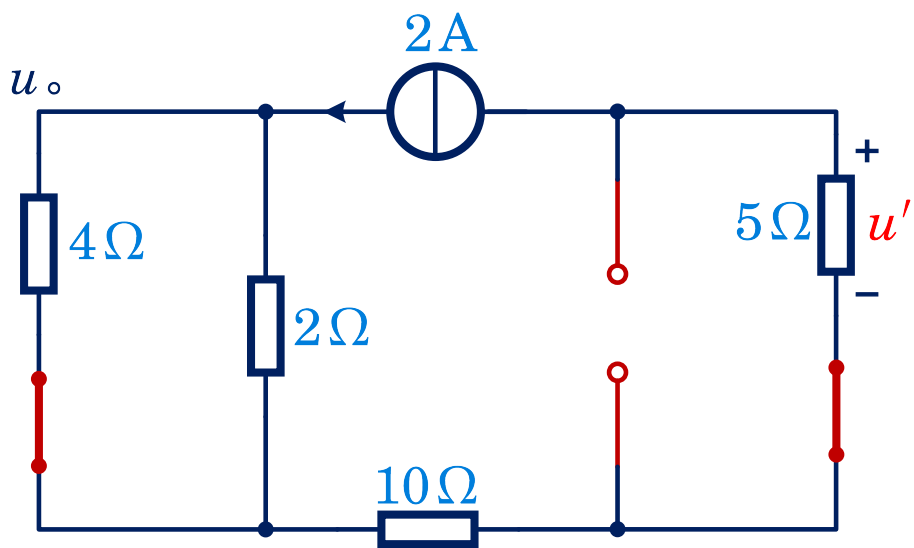
解 (1) 画电路图，标出分量
电流源开路，电压源短路

(2) 2A 电流源激励时
 $u' = -(2A \times 5\Omega) = -10V$

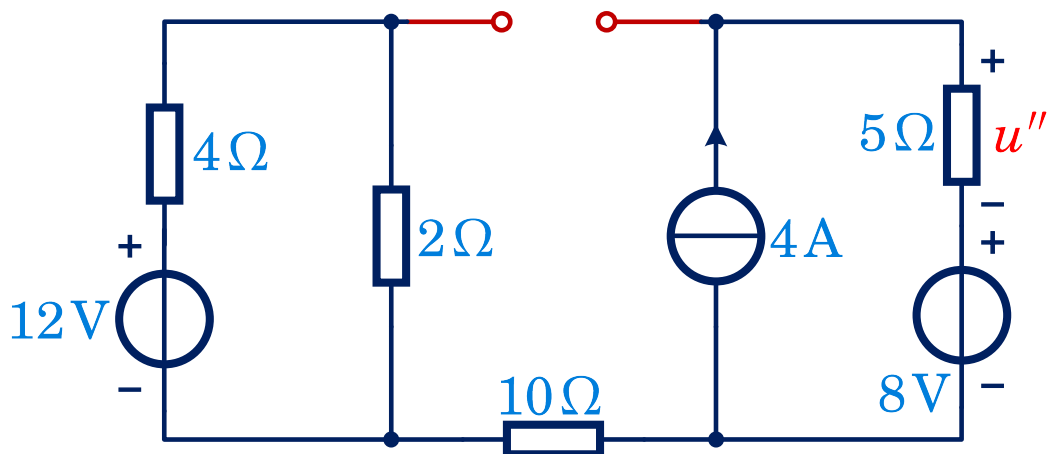
其他电源同时激励时
 $u'' = 4A \times 5\Omega = 20V$

(3) 分量叠加
 $u = u' + u'' = 10V$

不用叠加原理，直接 KCL 也可



分电路图：2A 电流源激励



分电路图：其他电源同时激励



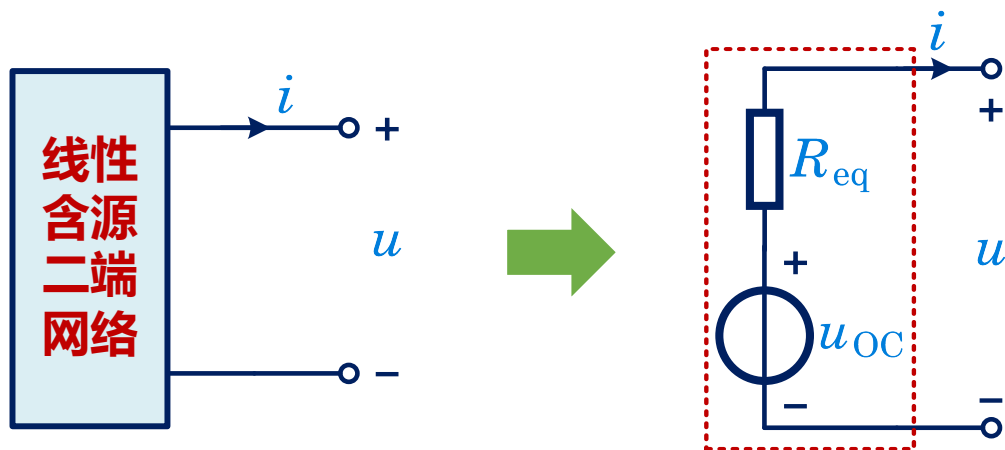
§3.2 戴维南定理和诺顿定理

电路分析的大多数方法需要列写多个方程联立求解，而在某些实际问题中只需要求解某一个支路的电流或电压，此时如果再列写方程组求解，就会把问题复杂化。针对这种情况，只需找出待求支路以外的等效电路即可，这也是戴维南定理和诺顿定理解决的问题。

3.2.1 戴维南定理

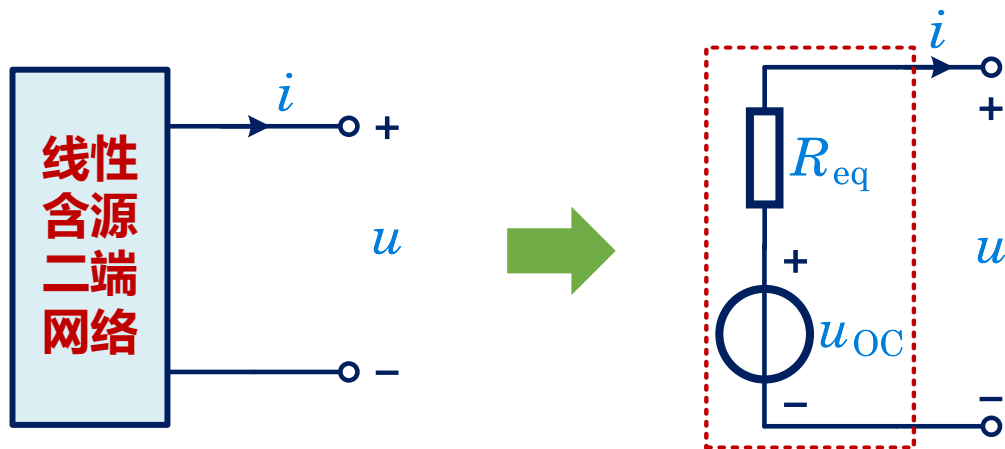
■ 戴维南定理

- ✧ 对于外电路来看，任意一个线性含源二端网络都可以等效变换为：
一个**独立电压源**和**电阻**的**串联**（称为**戴维南等效电路**）
- 独立电压源电压 = 外电路断开时二端网络端口的**开路电压**
独立电压源参考方向 = 开路电压参考方向
 - 串联电阻 = 二端网络内部独立电源置0后的输入电阻（**等效电阻**）



戴维南定理

3.2.1 戴维南定理



戴维南定理

■ 重要说明

- ① 含源线性二端网络为线性，但其所接外电路任意（改变也无妨）
- ② 含受控源时，控制电路和受控源必须都在被简化的同一电路中
- ③ 等效电阻是将二端网络内部的独立电源全部置0后的输入电阻
 - 电压源短路，电流源开路

3.2.1 戴维南定理

■ 等效电阻计算方法（3种）

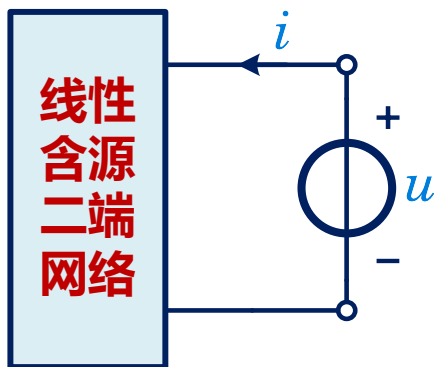
① 二端网络内部不含受控源时

- 先将内部的独立电源置0，再利用串并联和 Δ -Y相互变换计算

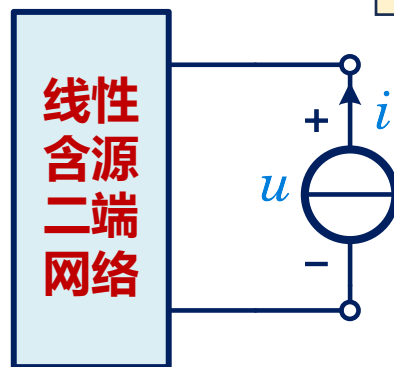
② 二端网络内部含有受控源时

- 先将内部的独立电源置0，再利用外加电源法计算

$$R_{\text{eq}} = \frac{u}{i}$$



外加电压源



外加电流源

③ 开路电压和短路电流法

- 可保留内部独立电源，开路电压和短路电流要取关联参考方向

3.2.1 戴维南定理

■ 等效电阻计算方法（3种）

① 二端网络内部不含受控源时

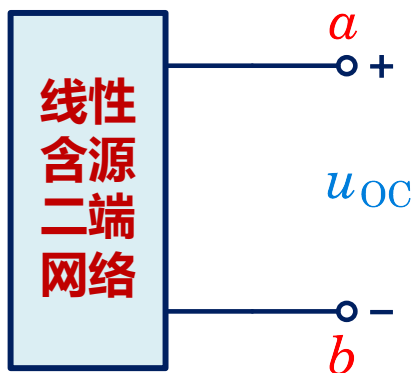
- 先将内部的独立电源置0，再利用串并联和 Δ -Y相互变换计算

② 二端网络内部含有受控源时

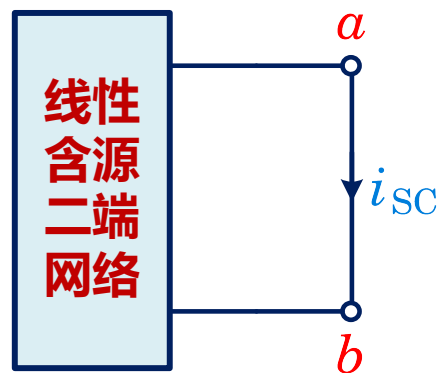
- 先将内部的独立电源置0，再利用外加电源法计算（非关联参考方向）

③ 开路电压和短路电流法

- 可保留内部独立电源，开路电压和短路电流要取关联参考方向



求开路电压



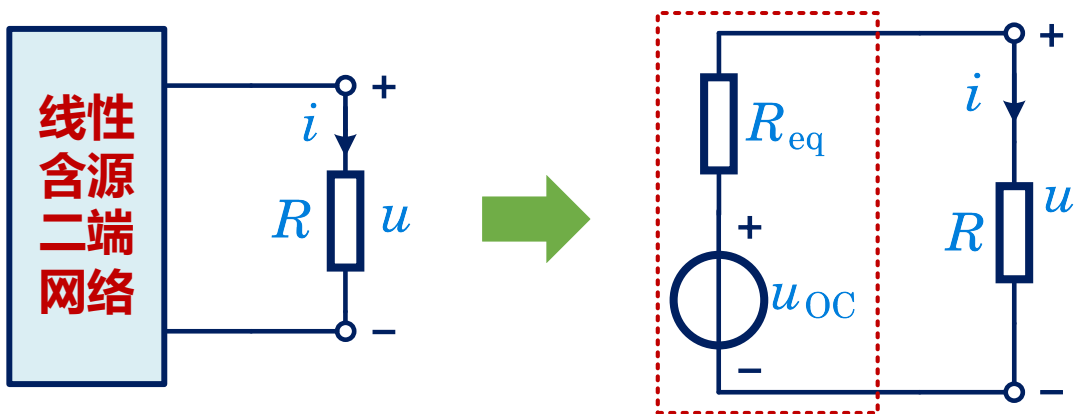
求短路电流

$$R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{SC}}$$

3.2.1 戴维南定理

■ 戴维南定理的应用

✧ 复杂电路中，求解某一支路的电压或电流



戴维南定理的应用：求负载电阻的电压和电流

✧ 步骤：

- ① 断开待求支路，标出余下二端网络的端口
- ② 计算余下二端网络的**开路电压**和**等效电阻**
- ③ 画余下二端网络的戴维南等效电路，重新连接端口支路
- ④ 在等效电路中求支路参数（电压和电流）

3.2.1 戴维南定理

例3-5

例 求图示二端网络的戴维南等效电路。

解 (1) 求开路电压 u_{OC}
 标出支路电流 i 和 i_1
 对结点 a 列 KCL 方程

$$i = i_1 + 6$$

列图示回路的 KVL 方程

$$6i_1 + 3i - 12 = 0$$

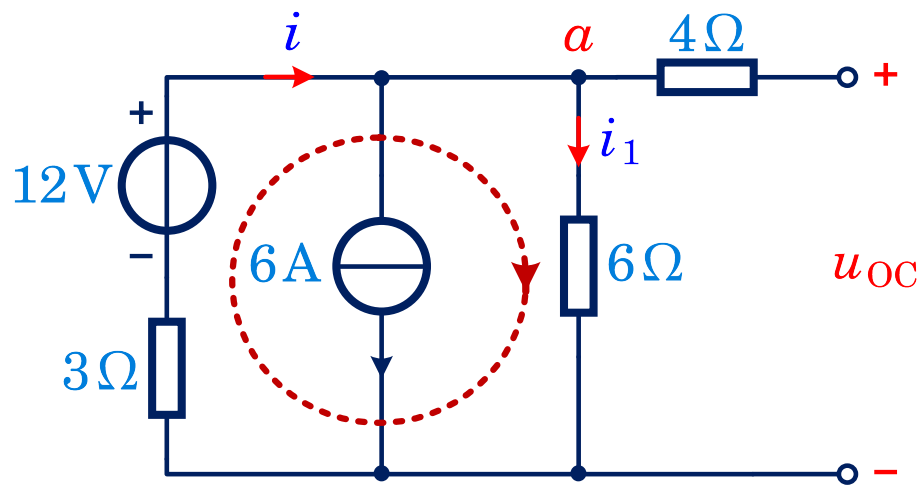
联立 KCL 和 KVL 求解

$$i_1 = -2/3 A$$

$$u_{OC} = 6i_1 = -4V$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

不含受控源，可直接将独立电源置 0



3.2.1 戴维南定理

例3-5

例 求图示二端网络的戴维南等效电路。

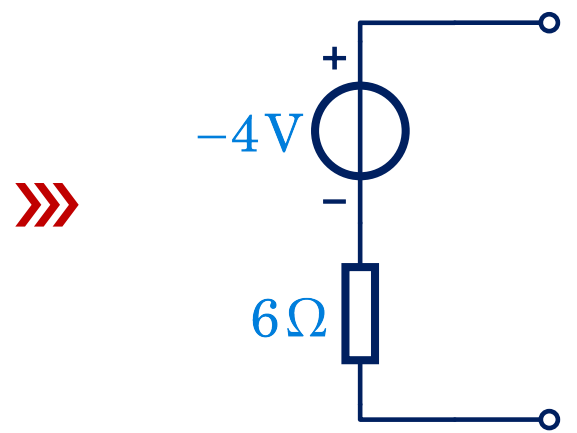
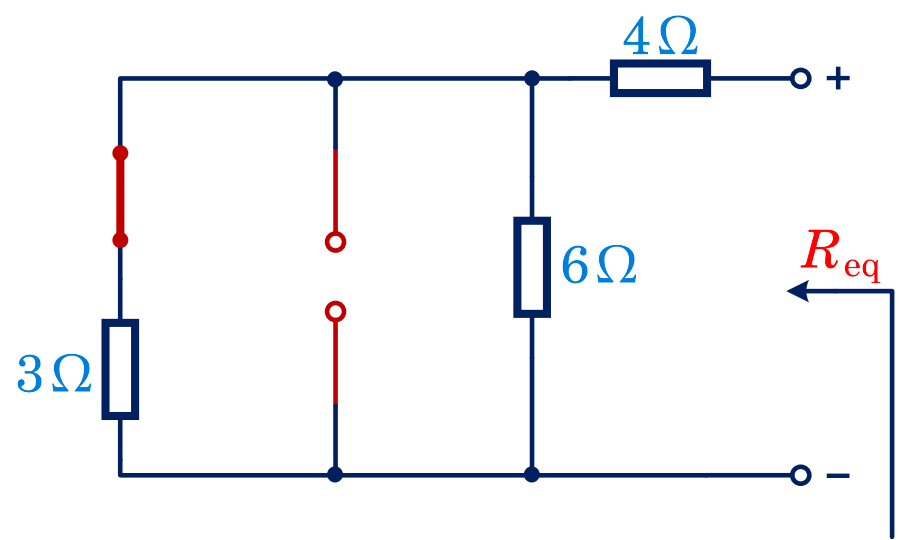
解 (1) 求开路电压 u_{OC}

$$u_{OC} = 6i_1 = -4V$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

$$R_{eq} = \left(\frac{3 \times 6}{3 + 6} + 4 \right) \Omega = 6 \Omega$$

(3) 画戴维南等效电路图



3.2.1 戴维南定理

例3-6

例 求图示二端网络的戴维南等效电路。

解 (1) 求开路电压 u_{OC}

标出支路电流 i 和 i_1

对结点 a 列 KCL 方程

$$i = i_1 + 0.5u$$

列图示回路的 KVL 方程

$$i + 2i_1 - 8 = 0$$

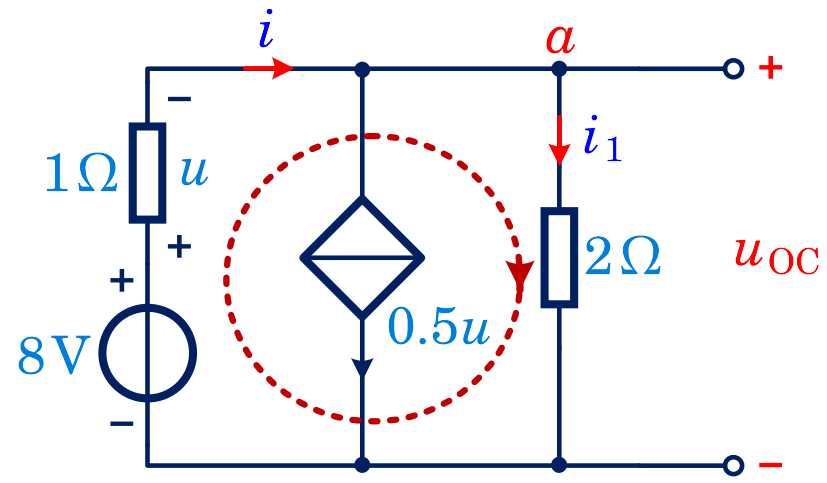
联立 KCL、KVL 方程和 $u = i_1$ 求解

$$i_1 = 2A$$

$$u_{OC} = 2i_1 = 4V$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

含有受控源，利用两种方法求解



3.2.1 戴维南定理

例3-6

例 求图示二端网络的戴维南等效电路。

解 (1) 求开路电压 u_{OC}

$$u_{OC} = 2i_1 = 4V$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

方法 1: 开路电压和短路电流法
端子短接, 标出 1Ω 电阻的电压和电流

对结点 a 列 KCL 方程

$$i_0 = 0.5u_0 + i_{SC}$$

列图示回路的 KVL 方程

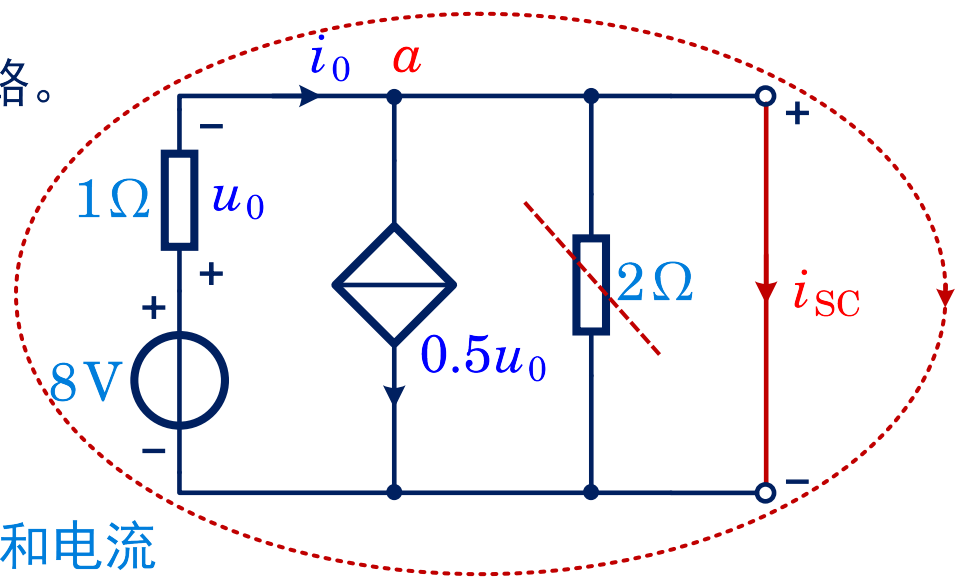
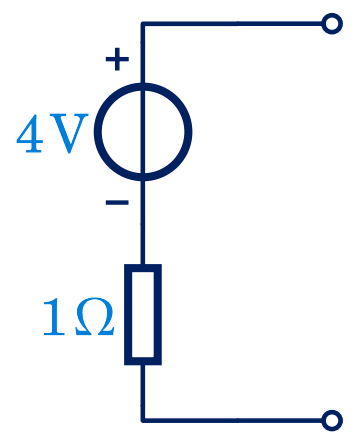
$$u_0 - 8 = 0$$

联立 KCL、KVL 方程和 $u_0 = i_0$ 求解

$$i_{SC} = 4A$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{SC}} = 1\Omega \gggg$$

(3) 画等效电路图



3.2.1 戴维南定理

例3-6

例 求图示二端网络的戴维南等效电路。

解 (1) 求开路电压 u_{OC}

$$u_{OC} = 2i_1 = 4V$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

方法 2: 外加电源法

独立电压源置 0, 外加电压源 u_s , 标注支路电流和电压如图

对结点 a 列 KCL 方程

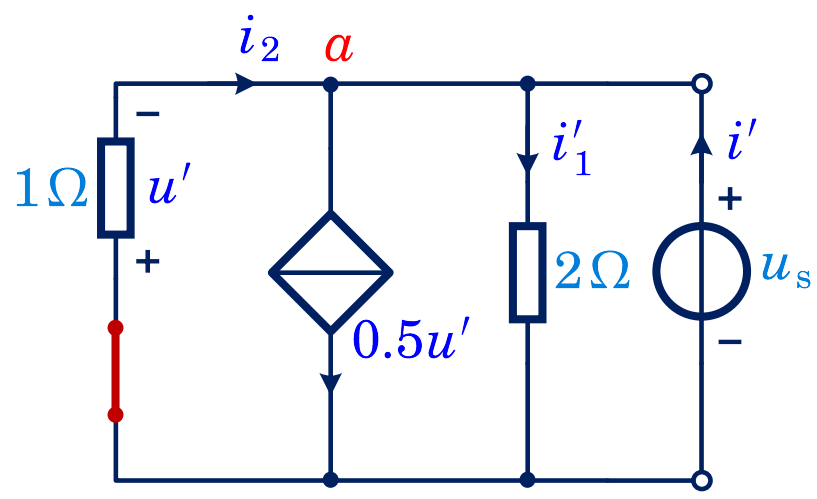
$$i_2 + i' = 0.5u' + i'_1$$

根据并联特性

$$u_s = 2i'_1 = -u'$$

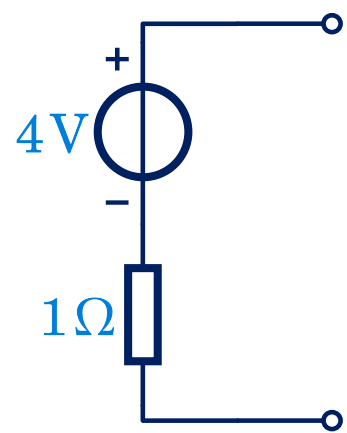
联立上述方程和 $u' = i_2$ 求解

$$i' = 2i'_1$$



(3) 画等效电路图

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{u_s}{i'} = \frac{2i'_1}{2i'_1} = 1\Omega \gg$$



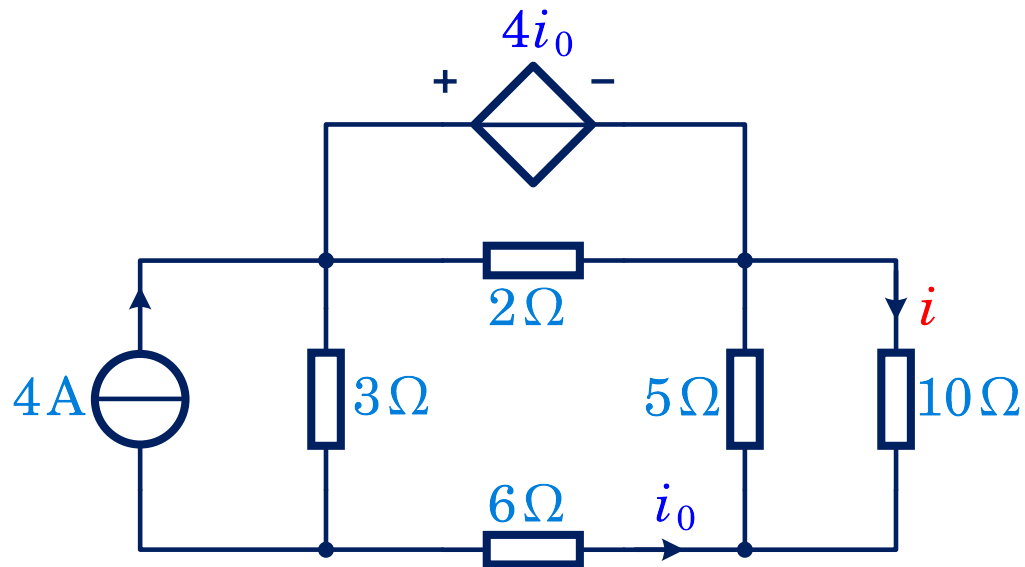


3.2.1 戴维南定理

例3-7

例 计算图示电路中的电流 i 。

解 (1) 断开 10Ω 电阻所在支路

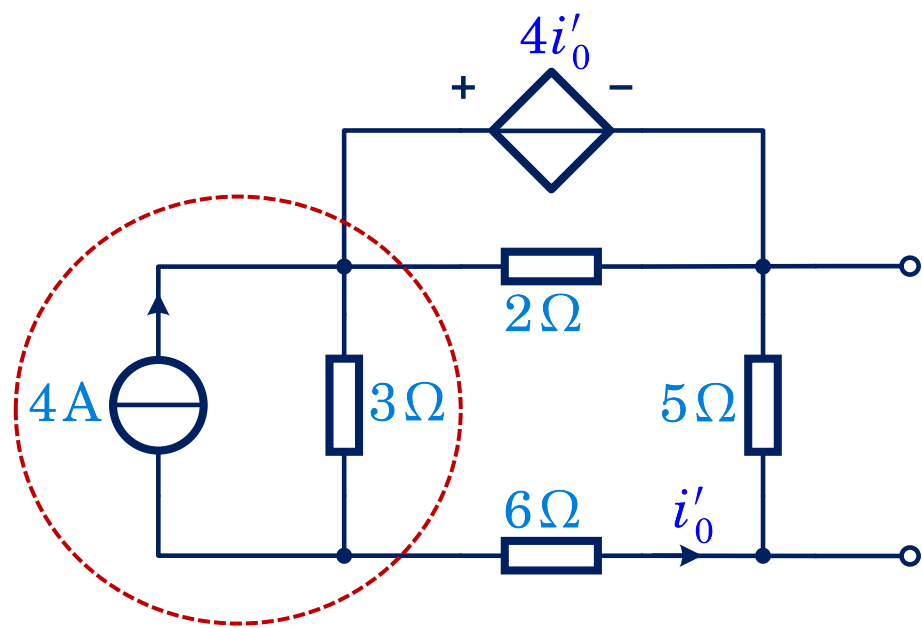


3.2.1 戴维南定理

例3-7

例 计算图示电路中的电流 i 。

解 (1) 断开 10Ω 电阻所在支路
图示部分做电源等效



3.2.1 戴维南定理

例3-7

例 计算图示电路中的电流 i 。

解 (1) 断开 10Ω 电阻所在支路

(2) 求开路电压 u_{OC}

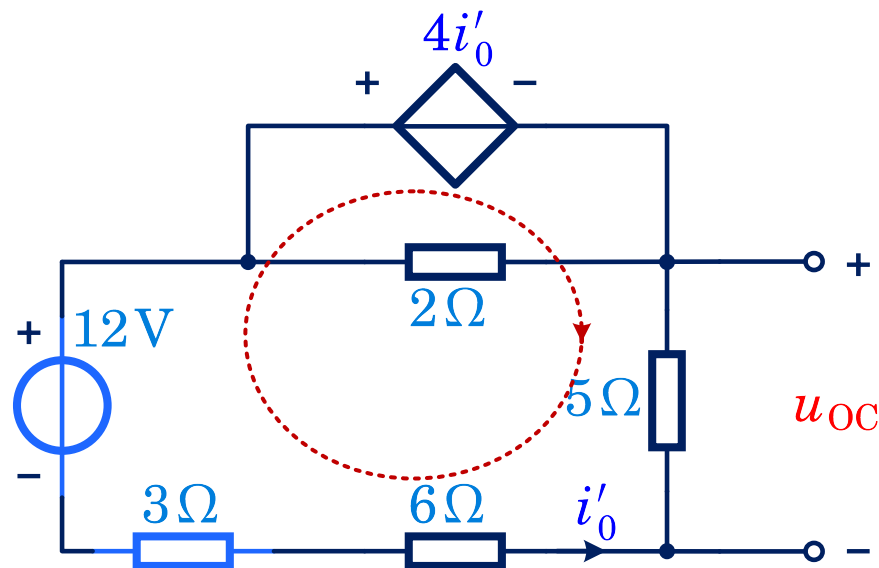
列图示回路的 KVL 方程

$$4i'_0 - (5 + 6 + 3)i'_0 = 12$$

$$\Rightarrow i'_0 = -1.2\text{A}$$

$$u_{OC} = -5i'_0 = 6\text{V}$$

(3) 求等效电阻 R_{eq}



3.2.1 戴维南定理

例3-7

例 计算图示电路中的电流 i 。

解 (1) 断开 10Ω 电阻所在支路

(2) 求开路电压 u_{OC}

$$u_{OC} = -5i'_0 = 6V$$

(3) 求等效电阻 R_{eq}

端子短接，标出电压和电流

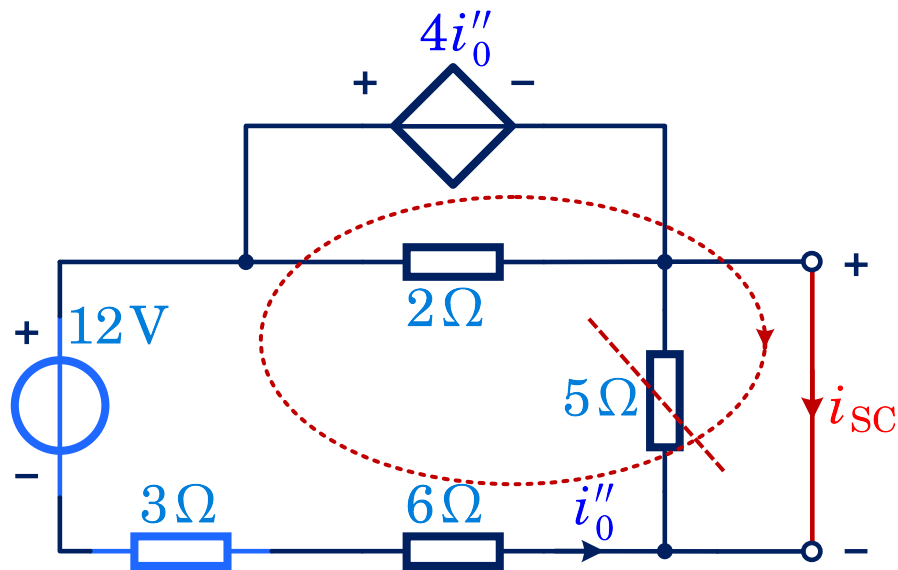
列图示回路的 KVL 方程

$$4i''_0 - (6 + 3)i''_0 = 12$$

$$\Rightarrow i''_0 = -2.4A$$

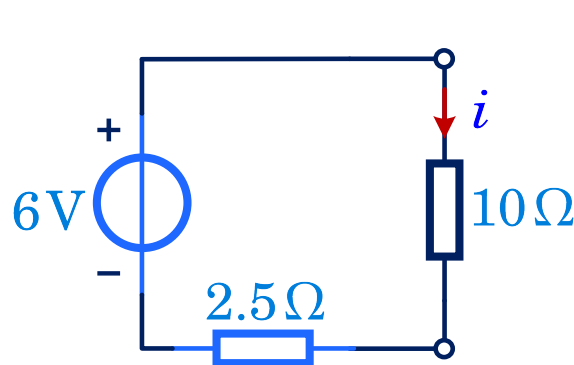
$$\Rightarrow i_{SC} = -i''_0 = 2.4A$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{SC}} = 2.5\Omega$$



(4) 画等效电路图

(5) 求支路参数

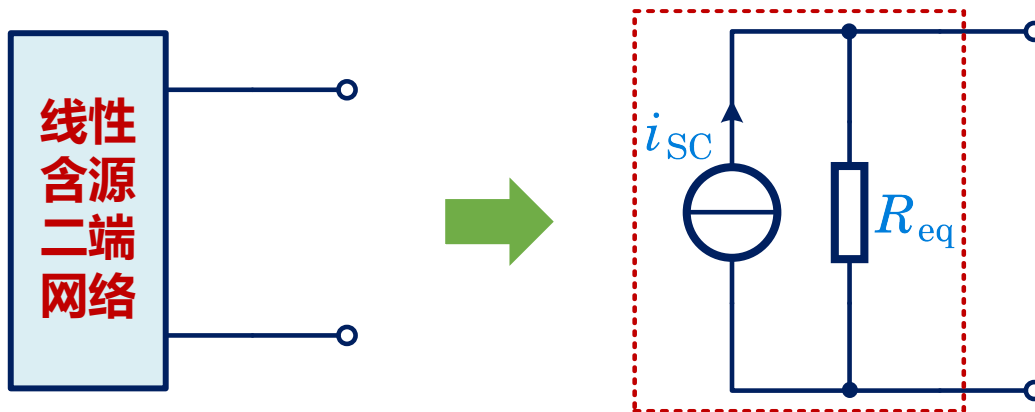


$$i = \frac{6V}{12.5\Omega} = 0.48A$$

3.2.2 诺顿定理

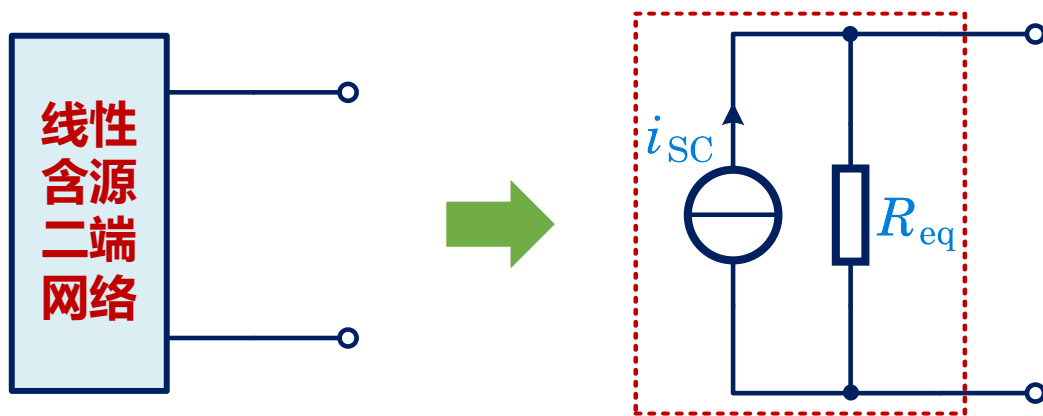
■ 诺顿定理

- ✧ 对于外电路来看，任意一个线性含源二端网络都可以等效变换为：
一个**独立电流源**和**电阻**的**并联**（称为**诺顿等效电路**）
- 独立电流源电流 = 二端网络端口的**短路电流**
独立电流源参考方向 = 短路电流参考方向
 - 并联电阻 = 二端网络内部独立电源置**0**后的输入电阻（**等效电阻**）



诺顿定理

3.2.2 诺顿定理



诺顿定理

■ 重要说明（同戴维南定理）

- ① 含源线性二端网络为线性，但其所接外电路任意（改变也无妨）
- ② 含受控源时，控制电路和受控源必须都在被简化的同一电路中
- ③ 等效电阻是将二端网络内部的独立电源全部置0后的输入电阻
 - 电压源短路，电流源开路

3.2.2 诺顿定理

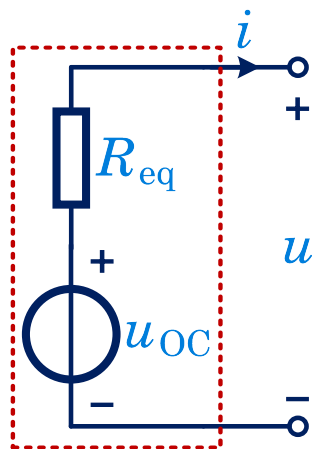
■ 等效电阻计算方法（3种）

✧ 与戴维南定理中的求解方法相同

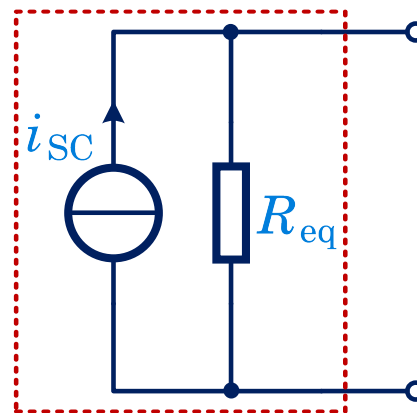
■ 特别注意：

✧ 等效电阻为0时，只有戴维南等效电路，无诺顿等效电路

✧ 等效电阻无穷大时，只有诺顿等效电路，无戴维南等效电路



戴维南等效电路

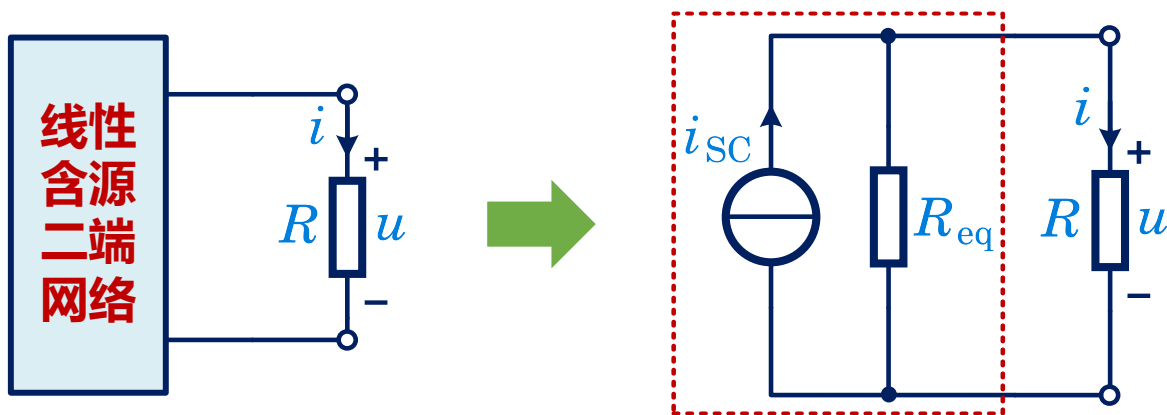


诺顿等效电路

3.2.2 诺顿定理

■ 诺顿定理的应用

✧ 复杂电路中，求解某一支路的电压或电流



诺顿定理的应用：求负载电阻的电压和电流

✧ 步骤：

- ① 断开待求支路，标出余下二端网络的端口
- ② 计算余下二端网络的**短路电流**和**等效电阻**
- ③ 画余下二端网络的诺顿等效电路，重新连接端口支路
- ④ 在等效电路中求支路参数（电压和电流）

3.2.2 诺顿定理

例3-8

例 求图示二端网络的诺顿等效电路。

解 (1) 求短路电流 i_{SC}

标出支路电流 i

对结点 a 列 KCL 方程

$$i = 1 + i_{SC}$$

列图示回路的 KVL 方程

$$4i - 12 = 0$$

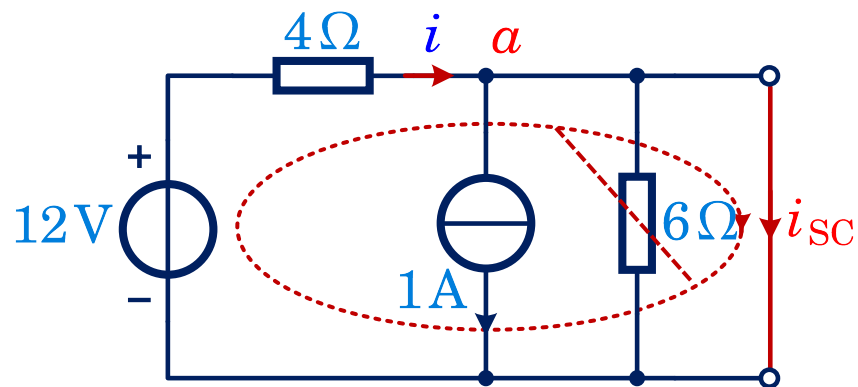
联立 KCL 和 KVL 求解

$$i = 3A$$

$$i_{SC} = 2A$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

不含受控源，可直接将独立电源置 0



3.2.2 诺顿定理

例3-8

例 求图示二端网络的诺顿等效电路。

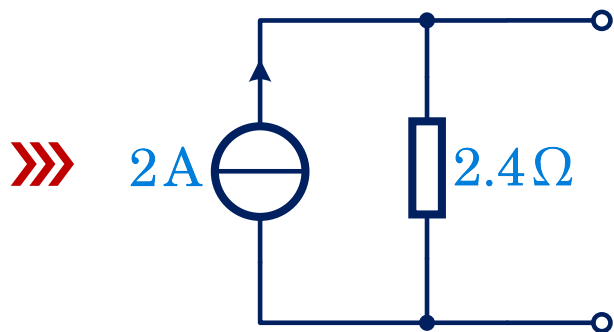
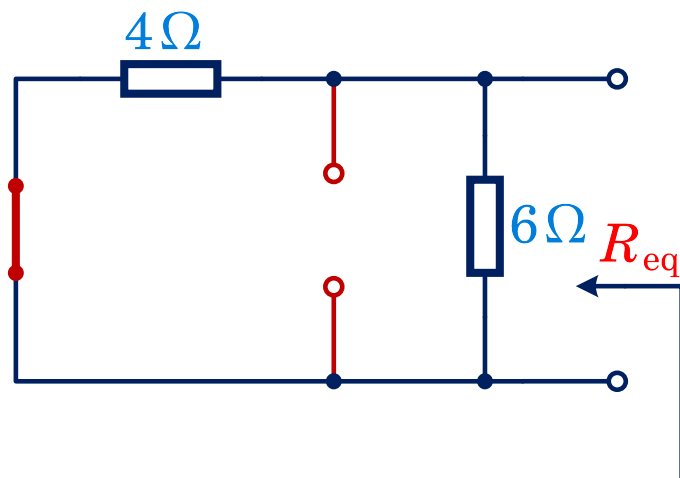
解 (1) 求短路电流 i_{SC}

$$i_{SC} = 2A$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

$$R_{eq} = \left(\frac{4 \times 6}{4 + 6} \right) \Omega = 2.4 \Omega$$

(3) 画诺顿等效电路图



3.2.2 诺顿定理

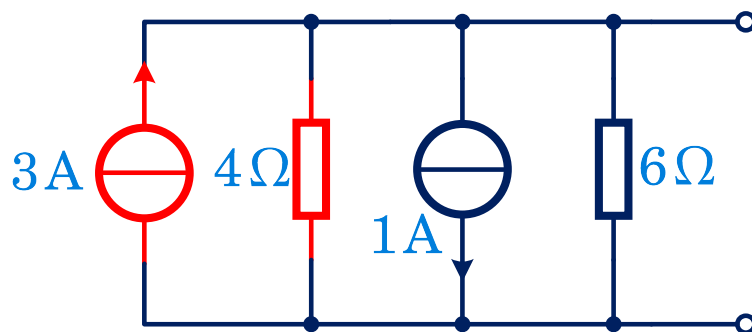
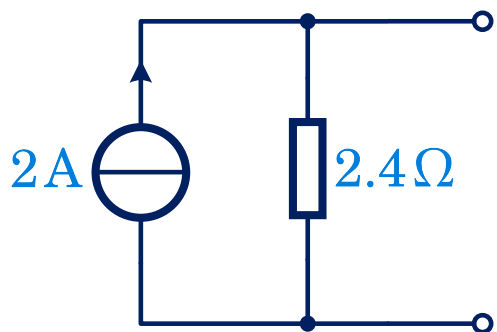
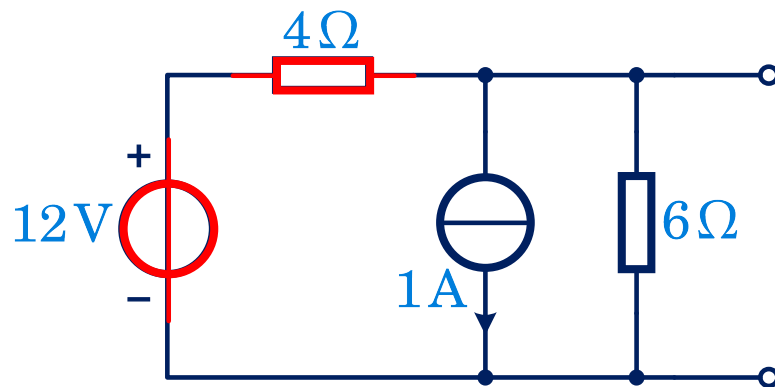
例3-8

例 求图示二端网络的诺顿等效电路。

解 该例也可以用电源等效变换完成等效变换后，显然

$$i_{SC} = (3 - 1)A = 2A$$

$$R_{eq} = \left(\frac{4 \times 6}{4 + 6} \right) \Omega = 2.4 \Omega$$



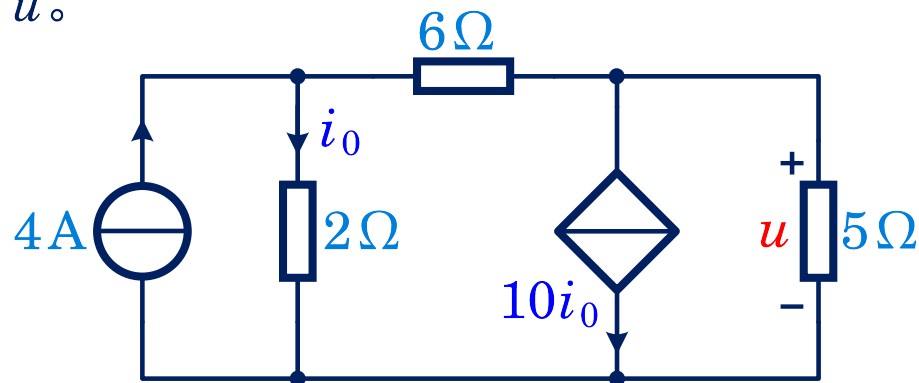


3.2.2 诺顿定理

例3-9

例 利用诺顿定理求图示电路中的电压 u 。

解 (1) 断开待求电压所在支路



3.2.2 诺顿定理

例3-9

例 利用诺顿定理求图示电路中的电压 u 。

解 (1) 断开待求电压所在支路

(2) 求短路电流 i_{SC}

对结点 a 和 b 列 KCL 方程

$$4 = i + i'_0$$

$$i = i_{SC} + 10i'_0$$

列图示回路的 KVL 方程

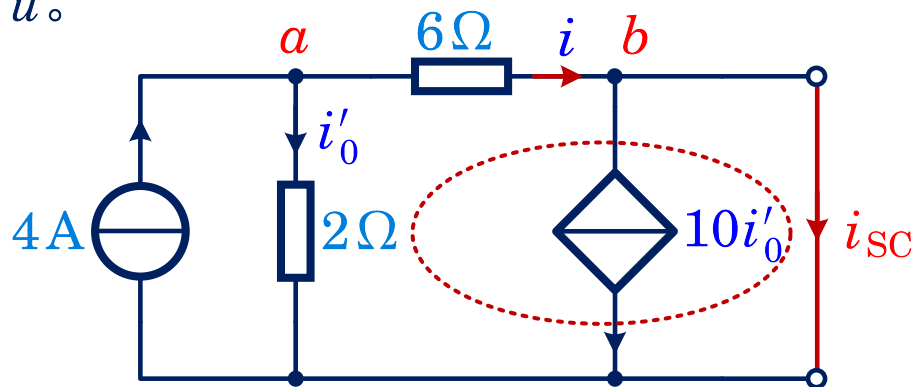
$$6i - 2i'_0 = 0$$

联立 KCL 和 KVL 求解

$$i'_0 = 3A$$

$$i_{SC} = -29A$$

(3) 求等效电阻 R_{eq}



3.2.2 诺顿定理

例3-9

例 利用诺顿定理求图示电路中的电压 u 。

解 (1) 断开待求电压所在支路

(2) 求短路电流 i_{SC}

$$i_{SC} = -29A$$

(3) 求等效电阻 R_{eq}

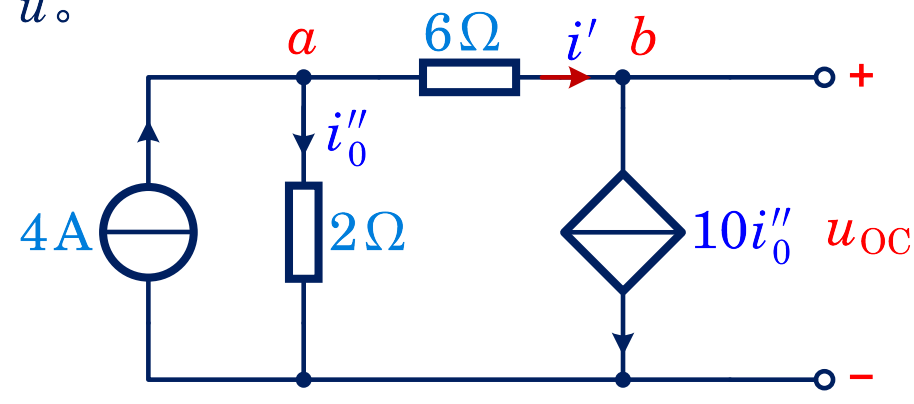
先求开路电压 u_{OC}

对结点 a 和 b 列 KCL 方程

$$\begin{cases} 4 = i' + i''_0 \\ i' = 10i''_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i''_0 = 4/11A \\ i' = 40/11A \end{cases}$$

$$u_{OC} = -6i' + 2i''_0 = -232/11V$$

$$\therefore R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{SC}} = 0.73\Omega$$



3.2.2 诺顿定理

例3-9

例 利用诺顿定理求图示电路中的电压 u 。

解 (1) 断开待求电压所在支路

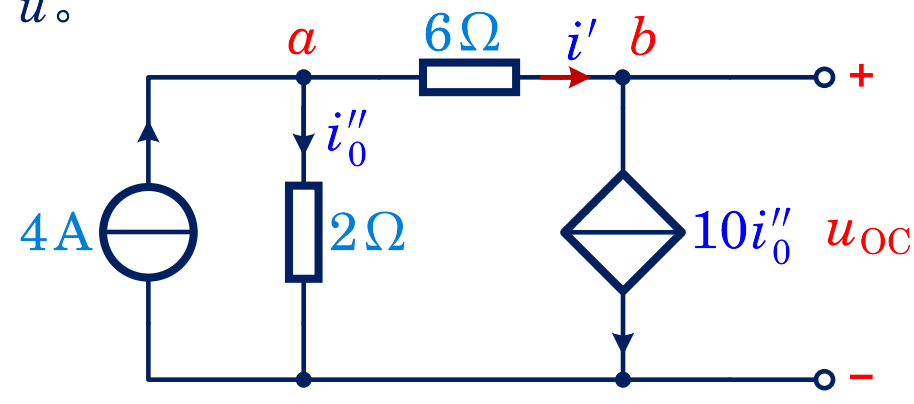
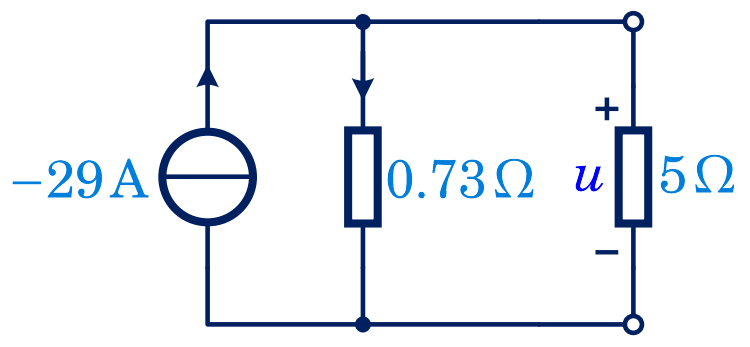
(2) 求短路电流 i_{SC}

$$i_{SC} = -29A$$

(3) 求等效电阻 R_{eq}

$$\therefore R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{SC}} = 0.73\Omega$$

(4) 画等效电路图



(5) 求支路参数

$$u = 5\Omega \times \left(\frac{0.73 // 5}{5} \times (-29) \right) A = -18.41V$$

3.2.2 诺顿定理

例3-9

例 利用诺顿定理求图示电路中的电压 u 。

解 补充外加电源法求等效电阻
 内部独立电源置 0
 外接独立电压源 u_s
 对结点 a 列 KCL 方程

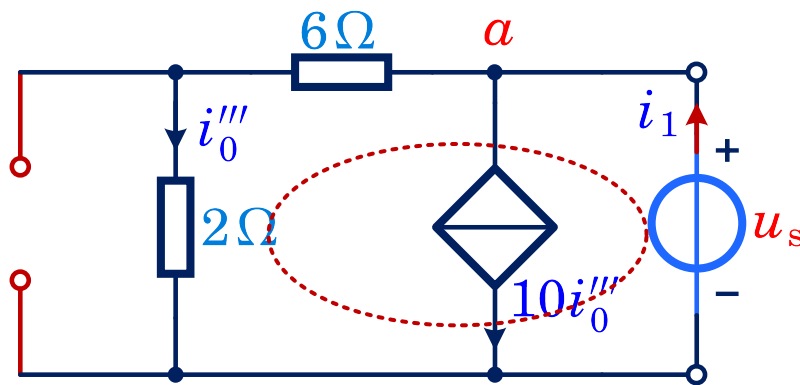
$$i_1 = i_0''' + 10i_0'''$$

列图示回路的 KVL 方程

$$u_s = (6 + 2)i_0'''$$

联立 KCL 和 KVL 求解

$$R_{eq} = \frac{u_s}{i_1} = \frac{8i_0'''}{11i_0'''} = 0.73\Omega$$



说明

- ✧ 戴维南等效和诺顿等效形式不同
- ✧ 二者的分析和计算过程基本一致
- ✧ 如果能求得 **开路电压** 和 **短路电流**
 - 两种等效形式都可以直接写出



§3.3 最大功率传输定理

在电力系统、测量、电子和信息工程的电子设备设计中，常常会遇到电阻负载如何从电路获得最大功率的问题。一个含源线性二端网络，当所接的负载不同时，二端网络传输给负载的功率也不同，最大功率传输定理表述：

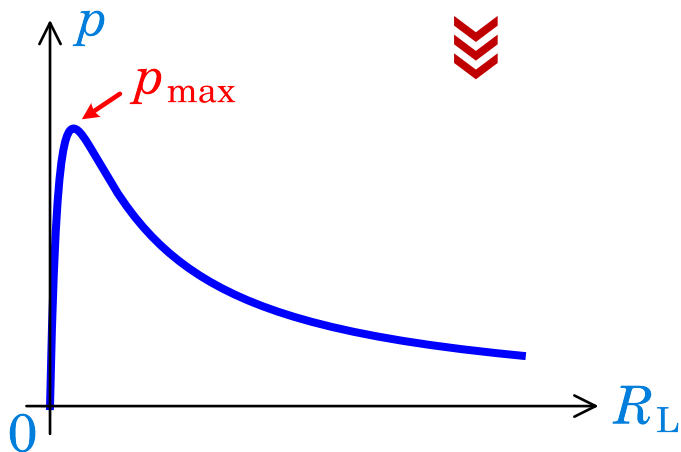
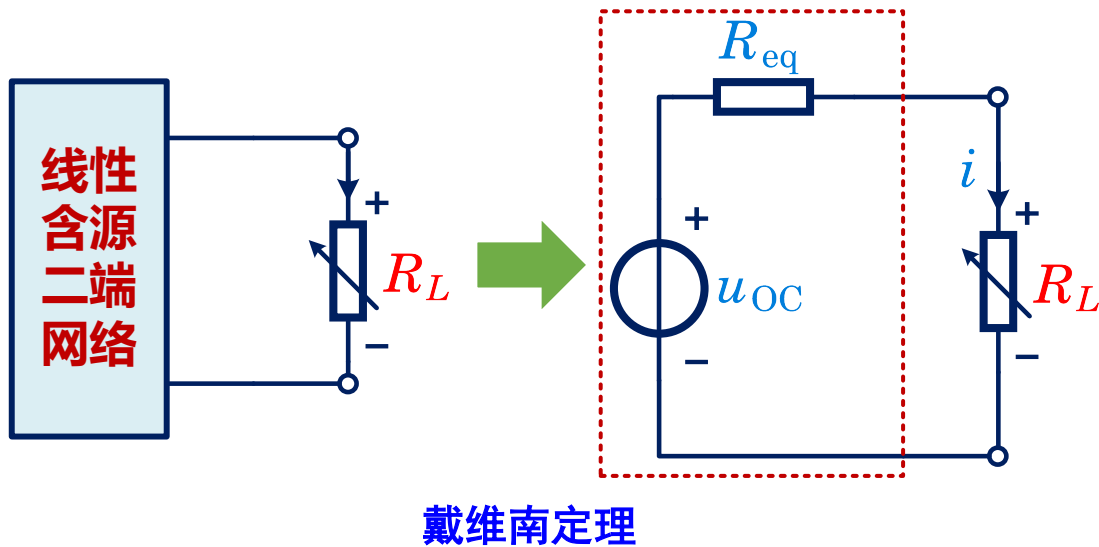
- 负载为何值时能从电路获取最大功率？
- 负载获得的最大功率的值是多少？

3.3 最大功率传输定理

■ 推导过程

- ◇ 根据戴维南定理只需要计算等效电路中负载的最大吸收功率即可

$$p = i^2 R_L = \frac{u_{OC}^2 R_L}{(R_{eq} + R_L)^2}$$



极大值点满足

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dR_L} &= \frac{u_{OC}^2}{(R_{eq} + R_L)^2} - \frac{2u_{OC}^2 R_L}{(R_{eq} + R_L)^3} \\ &= \frac{(R_{eq} - R_L)u_{OC}^2}{(R_{eq} + R_L)^3} = 0 \end{aligned}$$

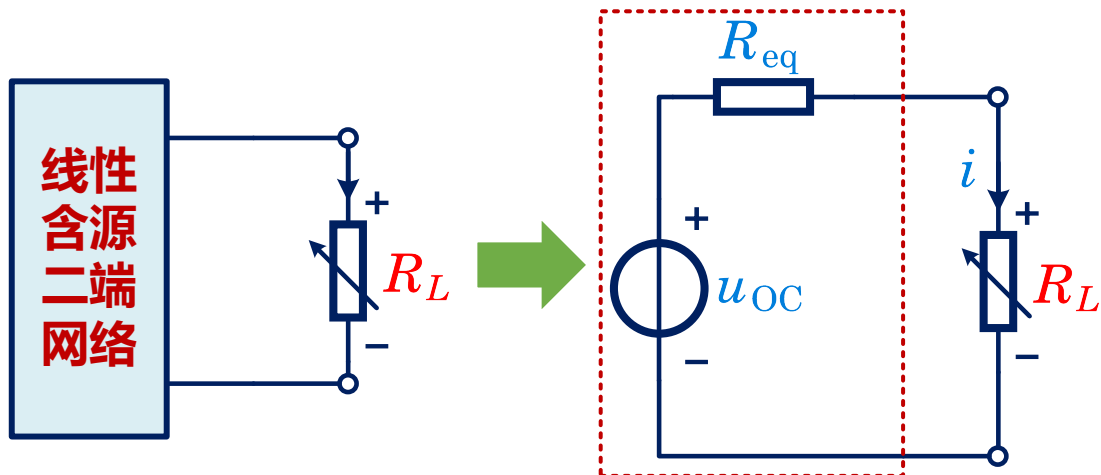
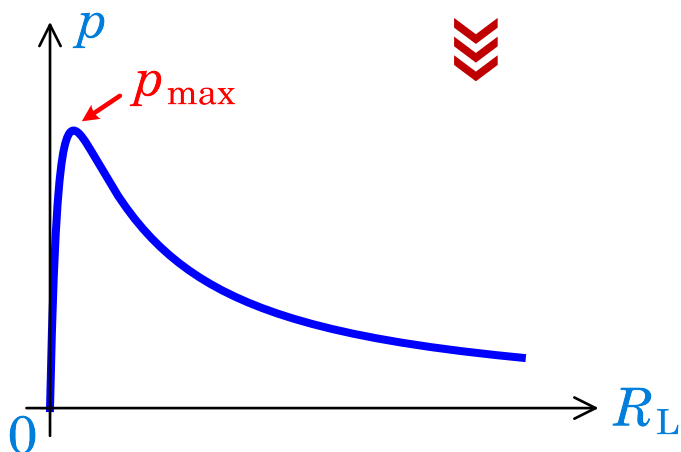
$$\ggg R_L = R_{eq}$$

3.3 最大功率传输定理

■ 推导过程

- ◇ 根据戴维南定理只需要计算等效电路中负载的最大吸收功率即可

$$p = i^2 R_L = \frac{u_{OC}^2 R_L}{(R_{eq} + R_L)^2}$$



戴维南定理



$$R_L = R_{eq}$$

$$p_{max} = \frac{u_{OC}^2}{4R_{eq}}$$

最大功率传输定理

传输效率为 50%，因：
 R_L 与 R_{eq} 吸收功率相等

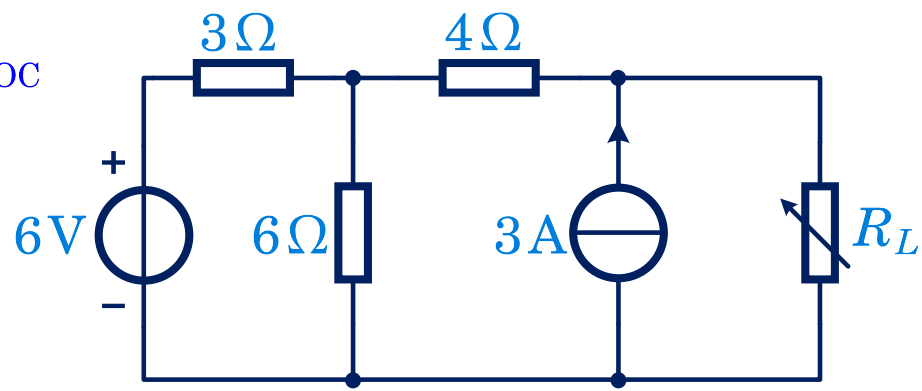


3.3 最大功率传输定理

例3-10

例 图示电路中，负载 R_L 为多少时，可以获得最大功率？获得的最大功率为多少？

解 (1) 断开负载 R_L ，求开路电压 u_{OC}



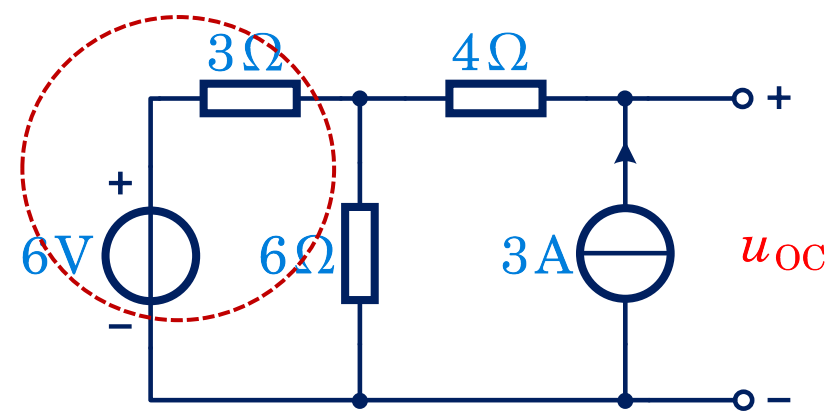
3.3 最大功率传输定理

例3-10

例 图示电路中，负载 R_L 为多少时，可以获得最大功率？获得的最大功率为多少？

解 (1) 断开负载 R_L ，求开路电压 u_{OC}

圈出部分电源等效变换
变为电流源与电阻并联

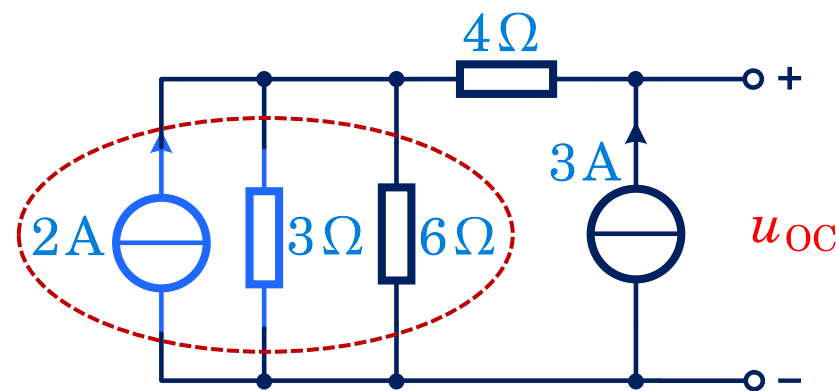


3.3 最大功率传输定理

例3-10

例 图示电路中，负载 R_L 为多少时，可以获得最大功率？获得的最大功率为多少？

解 (1) 断开负载 R_L ，求开路电压 u_{OC}
圈出部分电源等效变换
变为电压源与电阻串联



3.3 最大功率传输定理

例3-10

例 图示电路中，负载 R_L 为多少时，可以获得最大功率？获得的最大功率为多少？

解 (1) 断开负载 R_L ，求开路电压 u_{OC}

电源等效变换

$$u_{OC} = 3A \times (4 + 2)\Omega + 4V = 22V$$

(2) 求等效电阻 R_{eq}

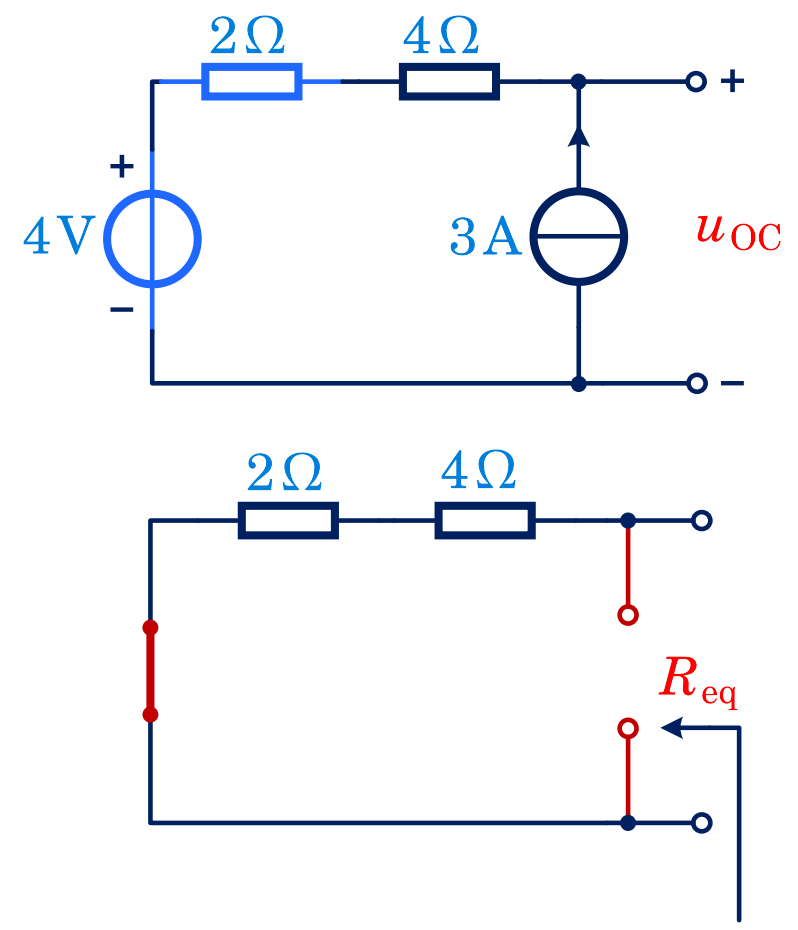
二端网络内部独立电源置零

$$R_{eq} = 6\Omega$$

(3) 根据最大功率传输定理

取 $R_L = R_{eq} = 6\Omega$ 时

$$p_{max} = \frac{u_{OC}^2}{4R_{eq}} = 20.17W$$





本章小结

- 叠加定理 ▲
- 戴维南定理 ▲
- 诺顿定理
- 最大功率传输定理