



江苏师范大学
JIANGSU NORMAL UNIVERSITY



电气工程及自动化学院
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND AUTOMATION

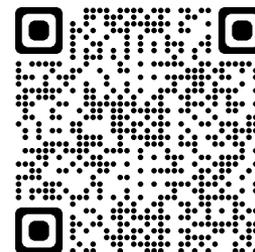


电路
分析



第7章 耦合电感、理想变压器 和二端口网络

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | <https://sslic.cn/cs>





本章内容

■ 耦合电感

◇ 互感 同名端 耦合电感线圈上的VCR

■ 含耦合电感电路的分析

◇ 互感的去耦等效

◇ 含耦合电感电路分析

■ 理想变压器

◇ 理想化模型 主要性能 含理想变压器电路的分析

■ 二端口网络

◇ 定义 方程和参数

◇ 连接 等效电路



§7.1 耦合电感



磁耦合（互感）现象在电工、电子技术等领域广泛应用。如变压器、电视机、收音机中周（中频变压器）和实验室常用的感应圈，它们都是利用**磁耦合原理**在电路中起到信号的传递、隔离、阻抗的匹配、**变压和变流**等作用。

7.1.1 互感

■ 自感（回顾1.3.3节电感元件）

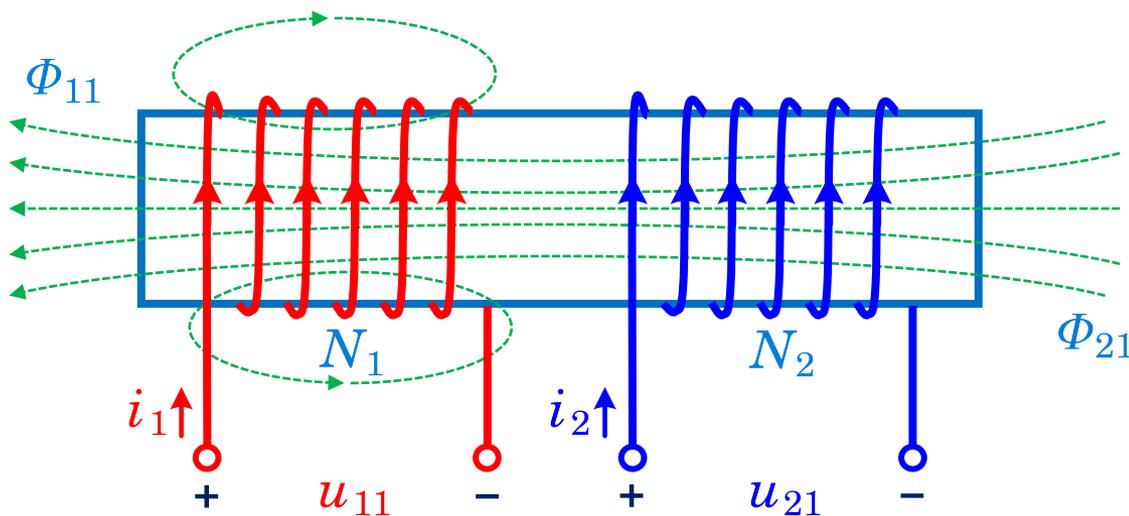
◇ 线圈自身通过的电流变化产生感应电压

- 自感应 自感电压

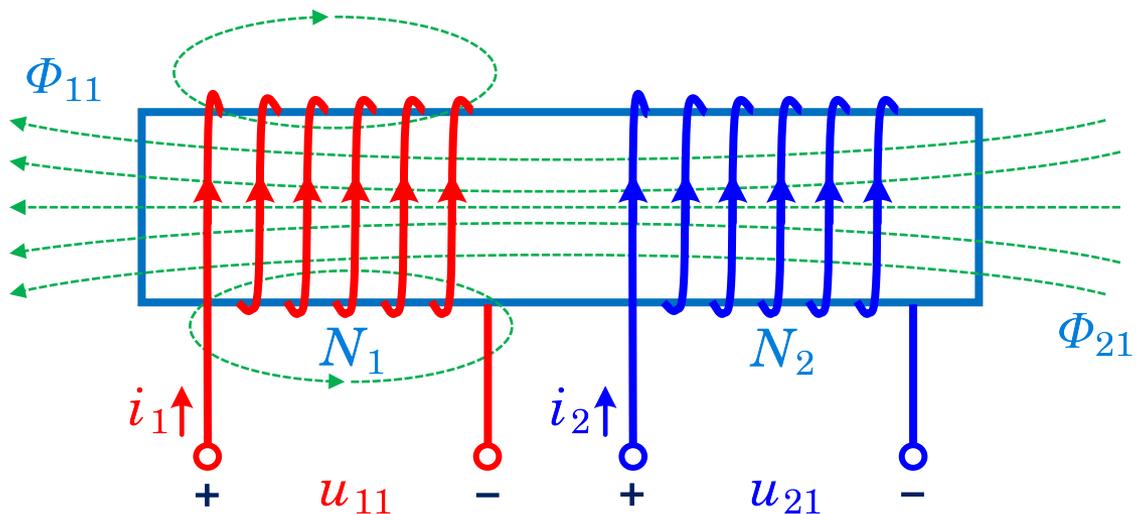
$$u = N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

■ 互感

◇ 空间位置相近的两个电感线圈，其中一个的电流变化会影响另一个的电流和电压，该现象称为**互感**



7.1.1 互感



电流 i_1 产生：自感磁通 Φ_{11}
互感磁通 Φ_{21}

电流 i_2 产生：自感磁通 Φ_{22}
互感磁通 Φ_{12}

❖ 线圈1中的总磁通

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

❖ 线圈2中的总磁通

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$$

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

电磁感应定律



$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$



7.1.1 互感

◇ 线圈1的感应电压

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

◇ 线圈2中感应电压

$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} + N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

自感系数： L_1, L_2

互感系数： M

自感电压

互感电压

■ 说明

◇ 互感系数的值与线圈的形状、几何位置、空间媒介有关，与线圈中的电流无关

$$M_{12} = M_{21} = M$$

◇ 互感电压有正负，取决于自感磁通链与互感磁通链方向是否一致



7.1.1 互感

■ 耦合系数

◇ 作用：定量描述两个耦合线圈的耦合紧密程度

- 影响耦合系数的因素：线圈结构、相互几何位置、空间磁介质

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

- **全耦合**，即没有**漏磁**： $k = 1$

■ 互感也存在不利影响

◇ 电子仪器中，易产生互感的元件可采取的措施举例：

- 远离
- 调整方位
- 磁屏蔽



7.1.2 同名端

■ 引入动机

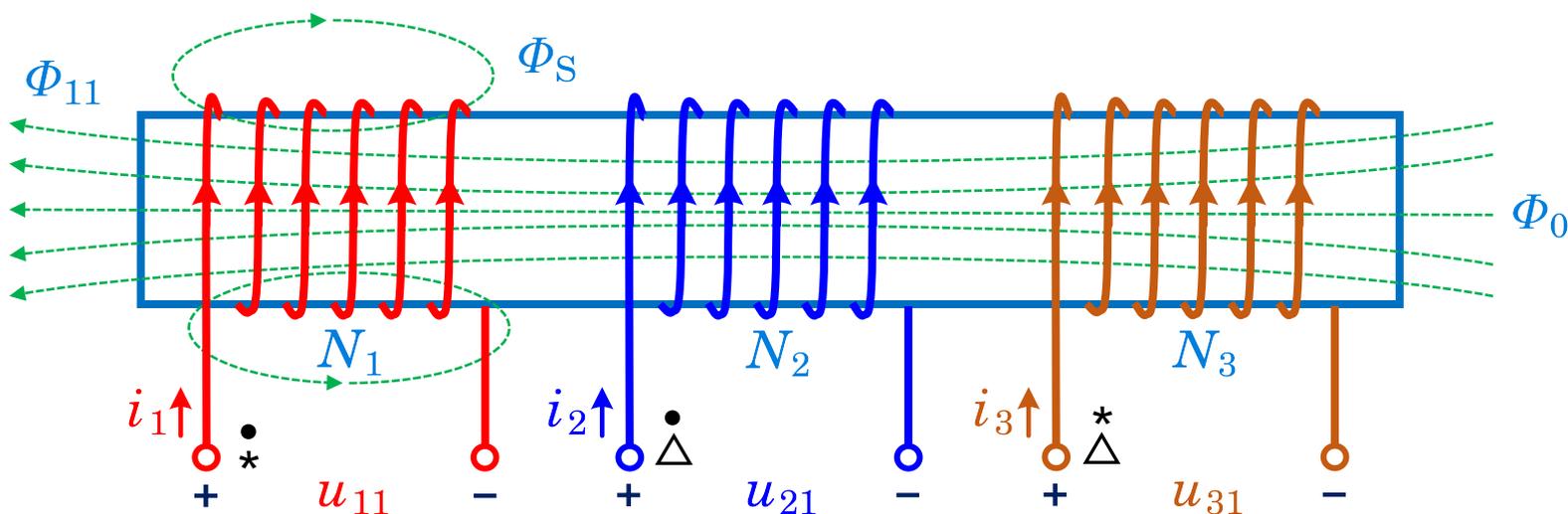
- ✧ 自感电压的正负：可根据是否与自身电流取**关联参考方向**来判断
- ✧ 互感电压的正负：需要根据互感磁场是**相互增强**还是**削弱**来判断
- ✧ 因此需要知道
 - 两个电流的流向
 - 两个线圈的绕向

7.1.2 同名端

■ 同名端

✧ 电流分别从两线圈的对应端子同时流入或流出时，若产生磁通相互增强，则两个对应端子称为互感线圈的**同名端**

- 标记符号：“*” “•” “△”



✧ 当多个线圈之间存在互感作用时，同名端必须两两线圈分别标定

7.1.2 同名端

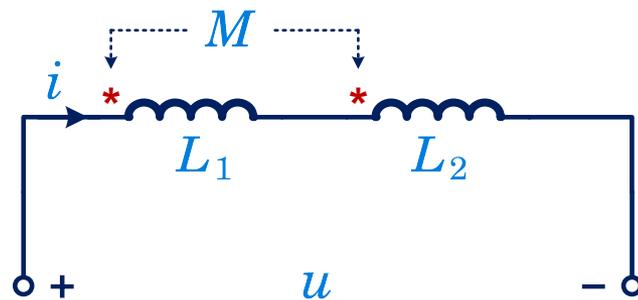
■ 同名端

✧ 互感线圈的相互作用：**同名端** + **电压电流参考方向**

- 可不用考虑线圈的实际绕向

✧ 结论：

- ① 两电流同时流入或流出同名端时，两电流产生的磁场将加强
- ② 随时间增大的电流从一个线圈的一个端子流入，将引起互感线圈相应同名端的电位升高



用同名端表示
具有互感的两线圈

7.1.2 同名端

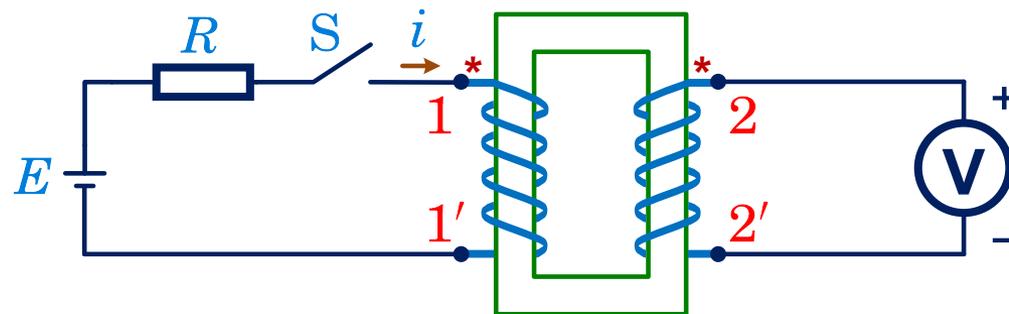
■ 同名端的实验测定

◇ 闭合开关，电压表**正偏**

- 1和2为同名端
- 1'和2'为同名端

◇ 闭合开关，电压表**反偏**

- 1和2'为同名端
- 1'和2为同名端



同名端的实验测定



7.1.3 耦合电感线圈上的VCR

■ 每个线圈上的VCR

$$u_1 = \pm L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = \pm L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

$$\dot{U}_1 = \pm j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \pm j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1$$

✧ 互感电压的正负根据同名端来确定

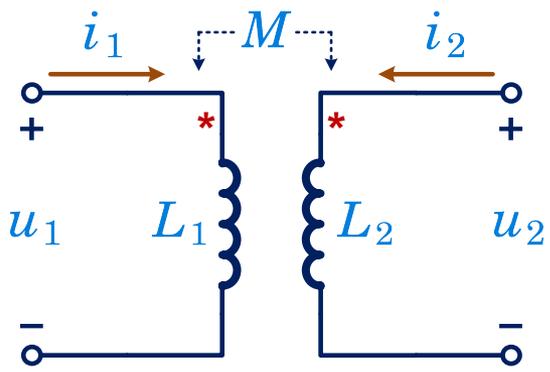
✧ 自感电压和互感电压的**符号判断规则**：

- ① 自感电压参考方向与产生它的电流方向**关联**时，自感电压前取“+”
否则取“-”
- ② 互感电压“+”极性端子与施感电流流进端子为**同名端**，互感电压前取“+”，否则取“-”

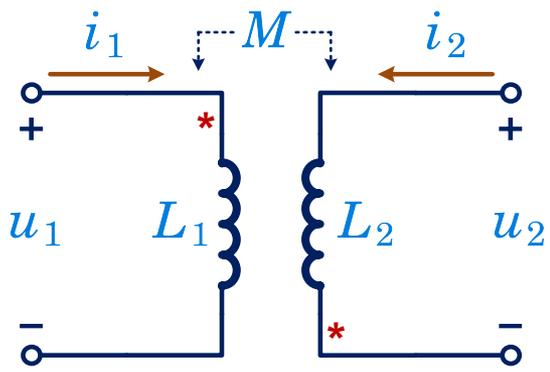
7.1.3 耦合电感线圈上的VCR

例7-1

例 写出图示 (a)、(b)、(c)、(d) 四组互感线圈上各自的电压与电流的关系。



(a)



(b)

解

$$(a) \quad u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

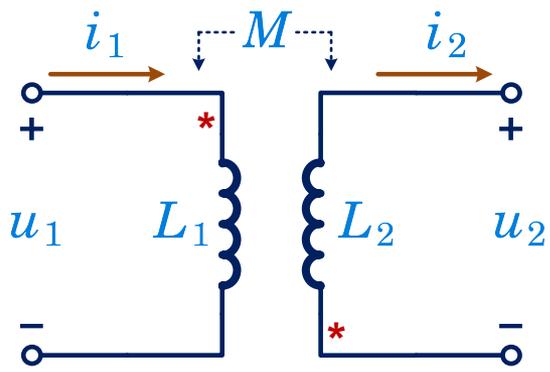
$$(b) \quad u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

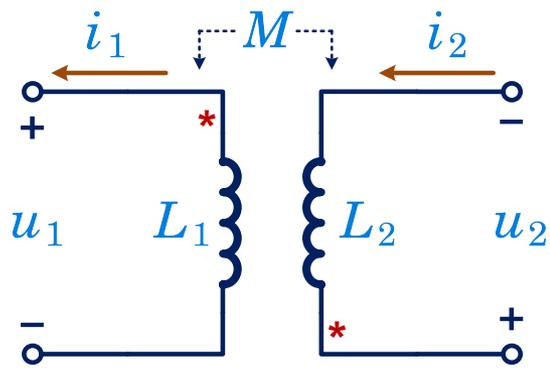
7.1.3 耦合电感线圈上的VCR

例7-1

例 写出图示 (a)、(b)、(c)、(d) 四组互感线圈上各自的电压与电流的关系。



(c)



(d)

解

$$(c) \quad u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$(d) \quad u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

$$u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$



§7.2 含耦合电感电路的分析

含有耦合的电感在特定的连接方式下可以通过去耦等效进行化简，去耦等效的方法需要根据耦合电感的连接方式确定。



7.2.1 互感的去耦等效

■ 耦合电感的连接方式

◇ 串联

- 顺向串联
- 反向串联

◇ 并联

- 同侧并联
- 异侧并联

◇ T形连接

- 同名端为共端的T形连接
- 异名端为共端的T形连接

7.2.1 互感的去耦等效：串联

■ 顺向（接）串联

◇ 特点

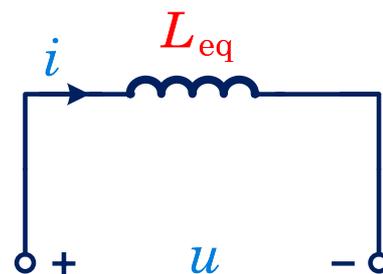
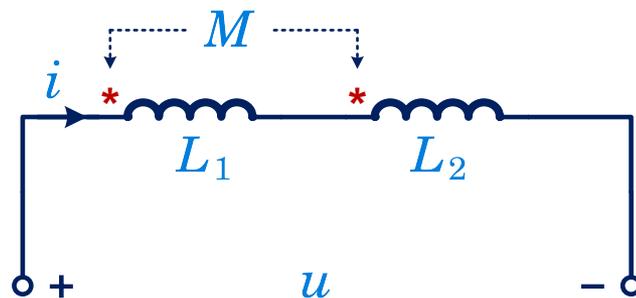
- 耦合电感串联
- 电流均由同名端流入

◇ 效果

- 磁场相互增强

◇ 根据KVL

$$\begin{aligned}
 u &= L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \\
 &= L_{eq} \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

7.2.1 互感的去耦等效：串联

■ 反向（接）串联

◇ 特点

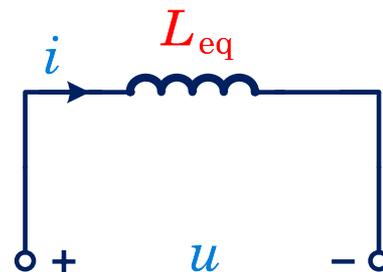
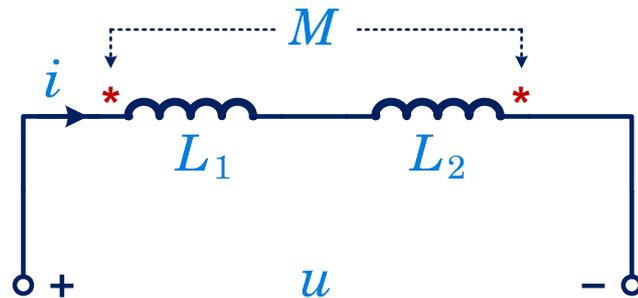
- 耦合电感串联
- 电流由一个同名端流入
由另一个同名端流出

◇ 效果

- 磁场相互削弱

◇ 根据KVL

$$\begin{aligned}
 u &= L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} \\
 &= L_{eq} \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$



$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$



7.2.1 互感的去耦等效：串联

■ 顺向（接）串联

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M$$

■ 反向（接）串联

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M$$

总是呈感性： $L_{\text{eq}} \geq 0$

$$M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

■ 互感系数的测量

✧ 两互感线圈顺接一次，测等效电感 $L_{\text{顺}}$

✧ 两互感线圈反接一次，测等效电感 $L_{\text{反}}$



$$M = \frac{L_{\text{顺}} - L_{\text{反}}}{4}$$

7.2.1 互感的去耦等效：并联

■ 同侧并联

◇ 特点

- 耦合电感并联
- 同名端接在同一结点上

◇ 根据KVL与KCL

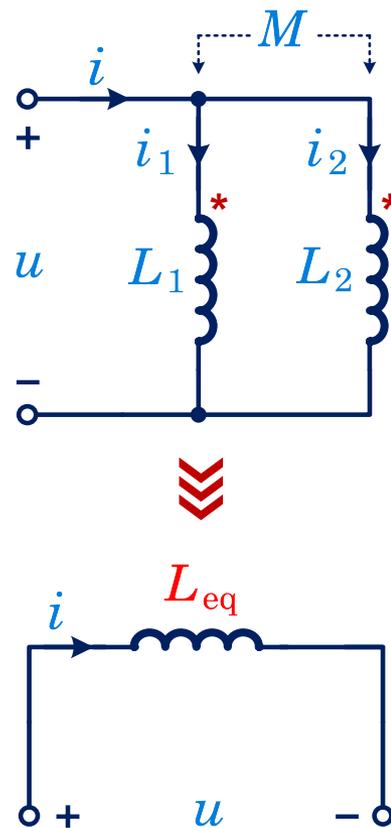
$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$i = i_1 + i_2$$

◇ 联立求解

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt}$$



$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

7.2.1 互感的去耦等效：并联

■ 异侧并联

◇ 特点

- 耦合电感并联
- **异**名端接在同一结点上

◇ 根据KVL与KCL

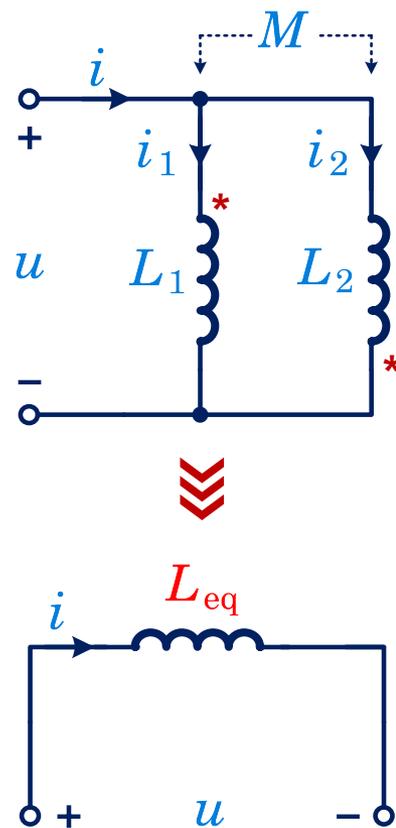
$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

$$i = i_1 + i_2$$

◇ 联立求解

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt}$$



$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

7.2.1 互感的去耦等效：T形连接

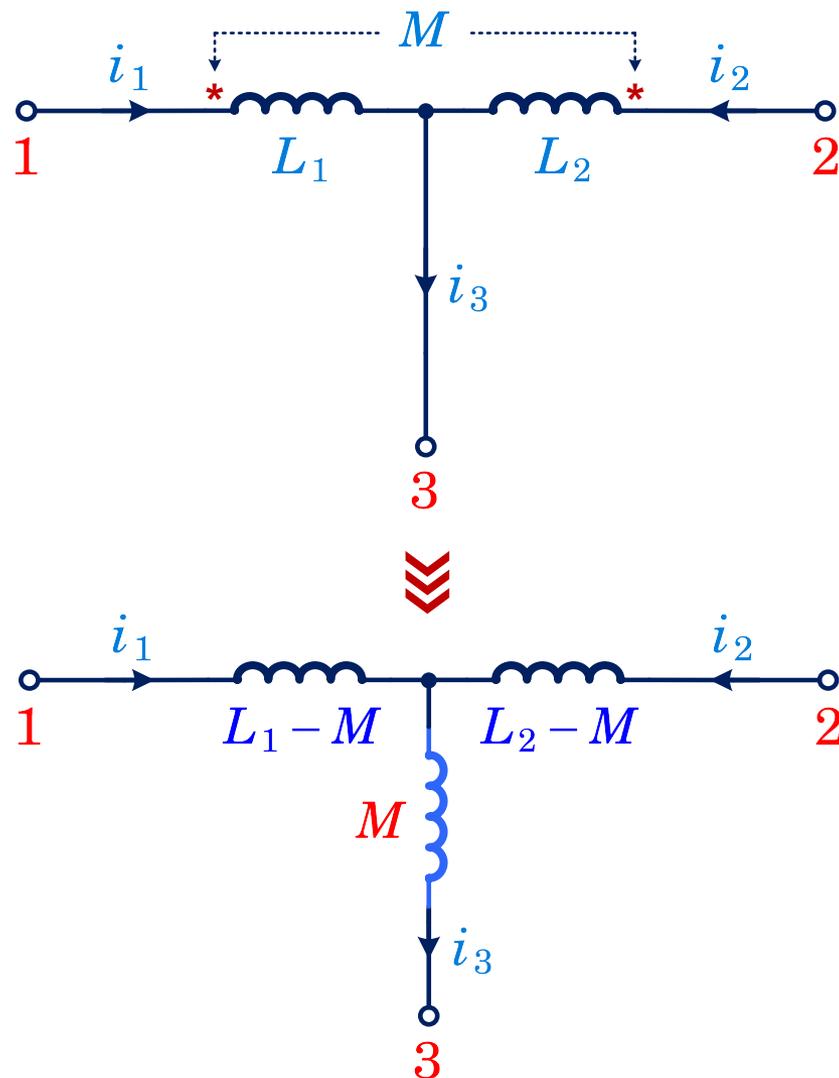
■ 同名端为共端的T形连接

✧ 根据KCL和电感电压关系

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$\begin{aligned} u_{13} &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ &= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{23} &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \\ &= (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt} \end{aligned}$$



7.2.1 互感的去耦等效：T形连接

■ 异名端为共端的T形连接

✧ 根据KCL和电感电压关系

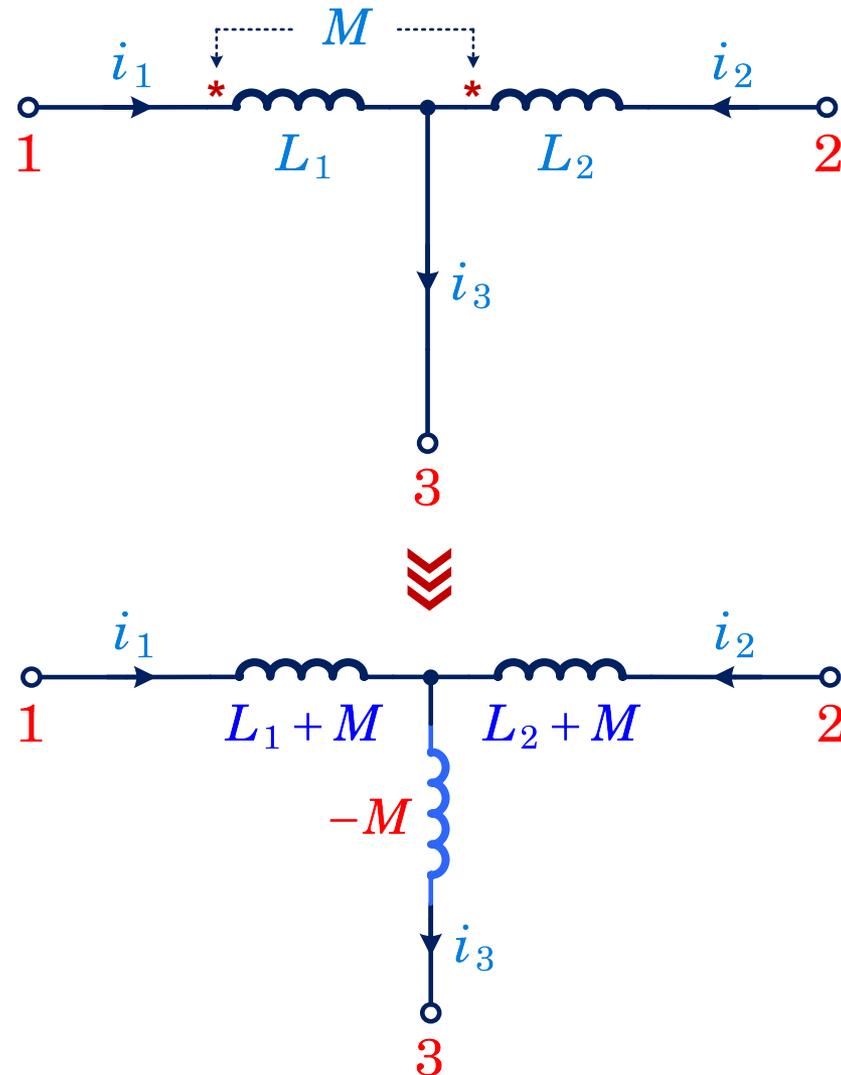
$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$u_{13} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$= (L_1 + M) \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_3}{dt}$$

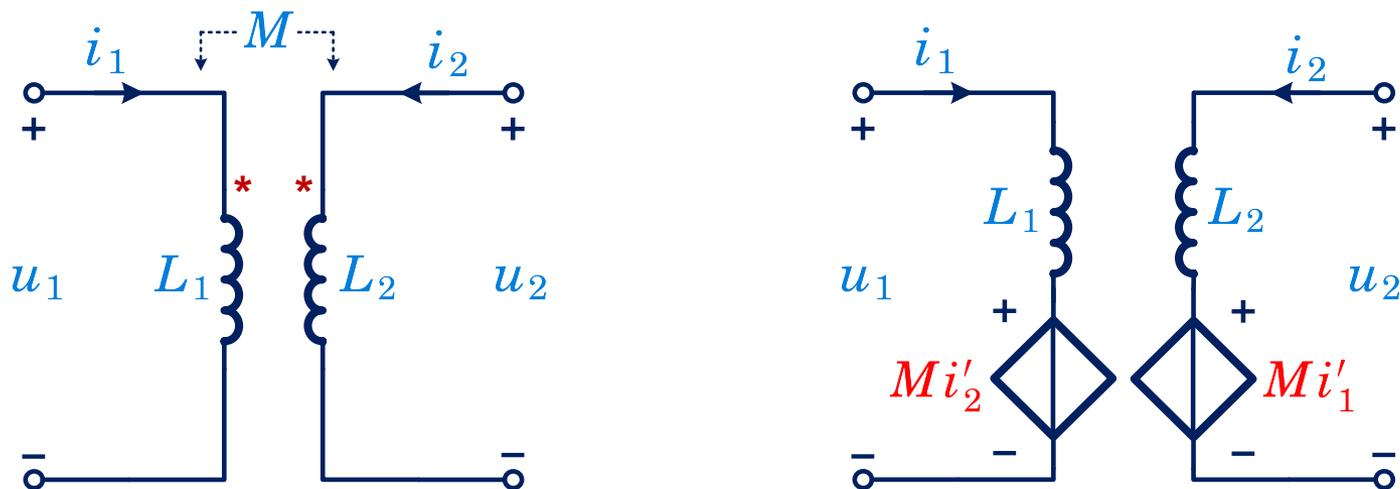
$$u_{23} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

$$= (L_2 + M) \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_3}{dt}$$



7.2.1 互感的去耦等效：受控源等效

■ 受控源等效电路



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

● 电流 i_2 控制的电压源

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

● 电流 i_1 控制的电压源



7.2.2 含耦合电感电路的分析

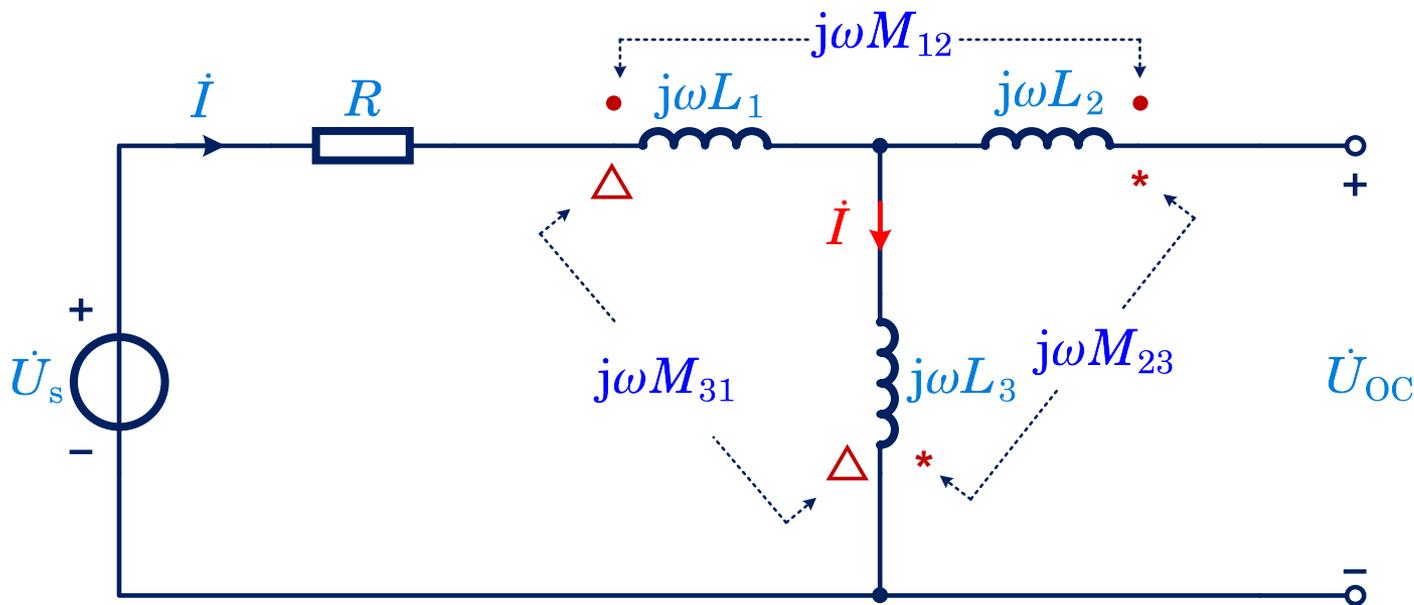
■ 采用正弦稳态电路的相量分析方法

- ✧ 方法1：带着耦合直接进行相量计算
- ✧ 方法2：先进行去耦等效，再相量计算

7.2.2 含耦合电感电路的分析

例7-2

例 求图示电路的开路电压。



解 方法 1：带着耦合电感直接计算

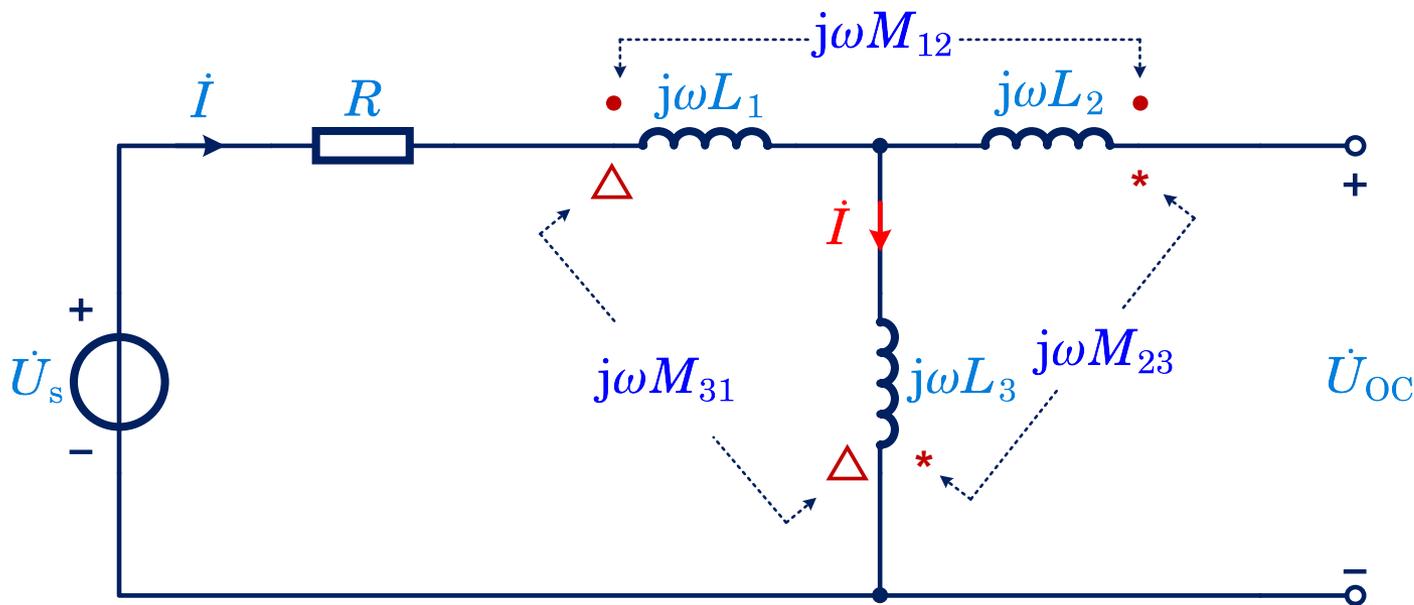
线圈 2 中无电流，线圈 1 和 3 反向串联

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{R + j\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})} \quad \dot{U}_{OC} = \frac{j\omega(L_3 - M_{31} + M_{12} - M_{23})\dot{U}_s}{R + j\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})}$$

7.2.2 含耦合电感电路的分析

例7-2

例 求图示电路的开路电压。

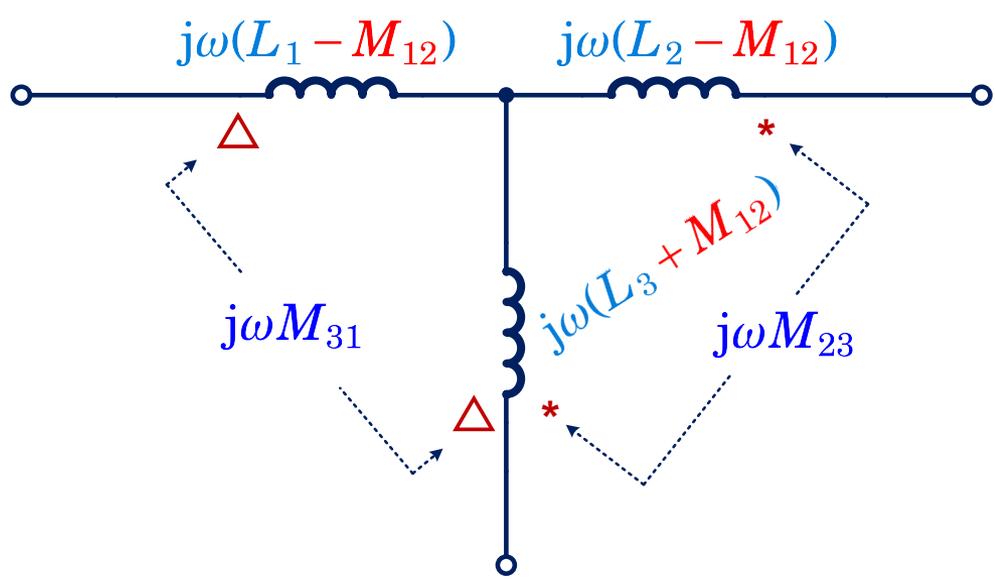


解 方法 2：基于去耦等效计算
 L_1 和 L_2 之间去耦（同名端共 T）

7.2.2 含耦合电感电路的分析

例7-2

例 求图示电路的开路电压。



解 方法 2：基于去耦等效计算

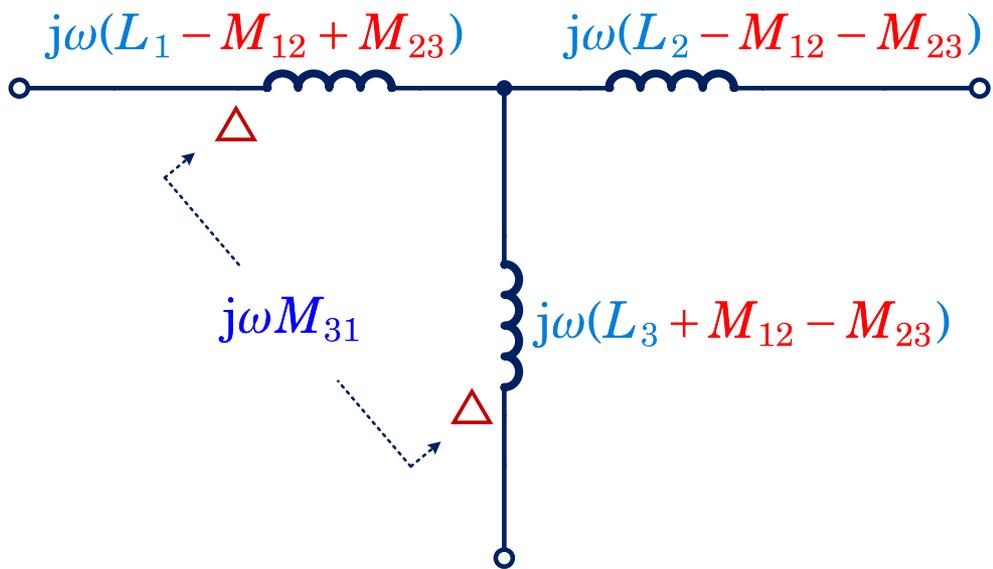
L_1 和 L_2 之间去耦（同名端共 T）

L_2 和 L_3 之间去耦（同名端共 T）

7.2.2 含耦合电感电路的分析

例7-2

例 求图示电路的开路电压。



解 方法 2：基于去耦等效计算

L_1 和 L_2 之间去耦（同名端共 T）

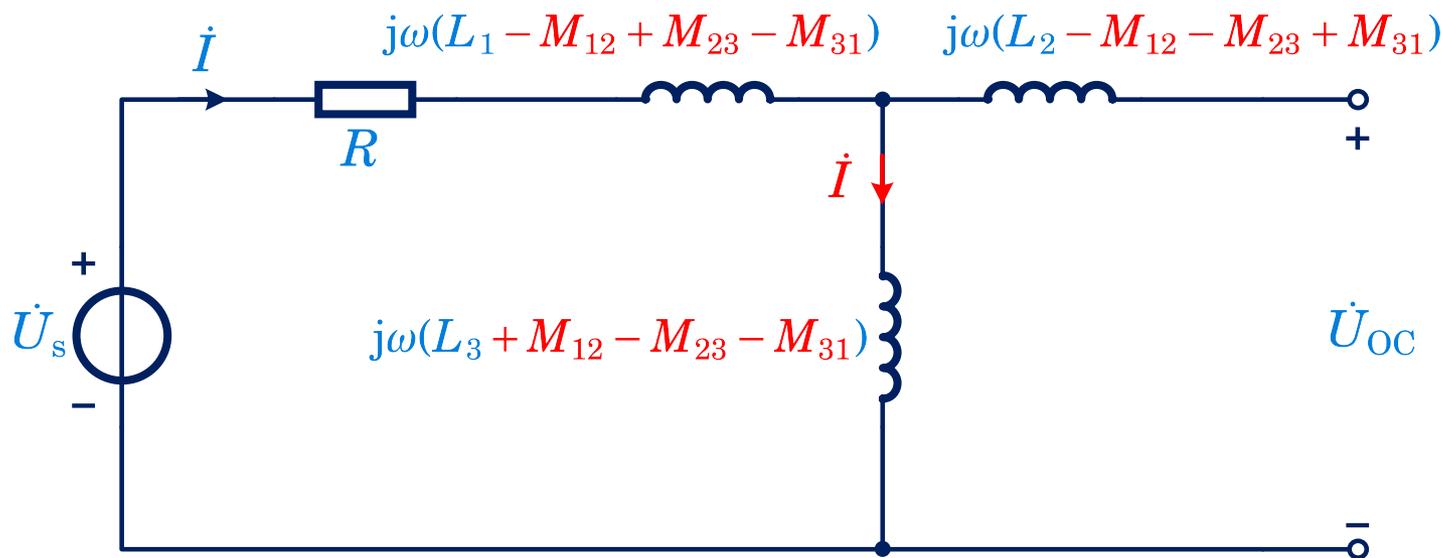
L_2 和 L_3 之间去耦（同名端共 T）

L_2 和 L_3 之间去耦（同名端共 T）

7.2.2 含耦合电感电路的分析

例7-2

例 求图示电路的开路电压。



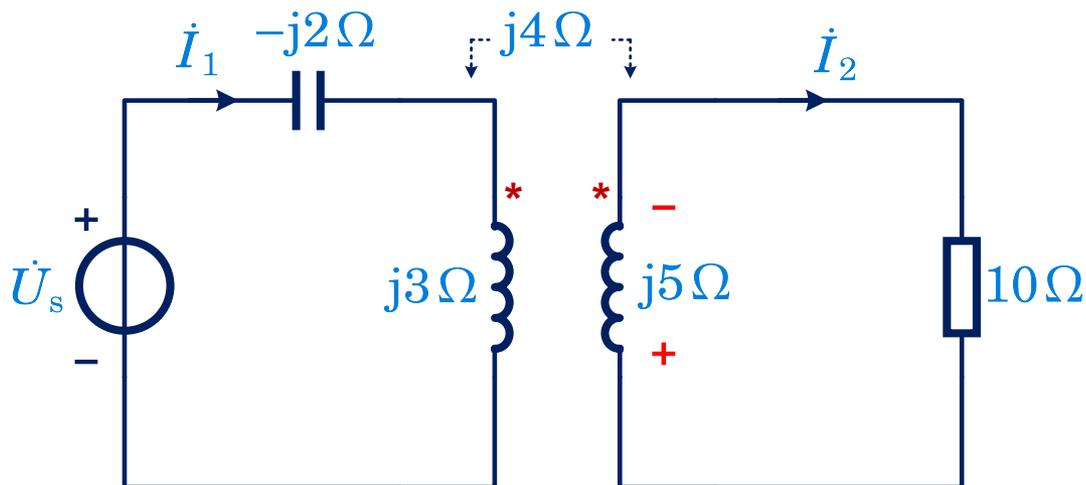
解 方法 2：基于去耦等效计算

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{R + j\omega(L_1 + L_3 - 2M_{31})} \quad \dot{U}_{OC} = \frac{j\omega(L_3 + M_{12} - M_{31} - M_{23})\dot{U}_s}{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M_{31})}$$

7.2.2 含耦合电感电路的分析

例7-3

例 图示电路中，已知 $\dot{U}_s = 12\angle 0^\circ \text{V}$ ，请计算电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。



解 采用方法 1

考虑互感，直接列两个 KVL 方程

$$\left. \begin{aligned} (-j2 + j3)\dot{I}_1 - j4\dot{I}_2 &= \dot{U}_s \\ (10 + j5)\dot{I}_2 - j4\dot{I}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{I}_1 &= 9.03\angle -15.7^\circ \text{A} \\ \dot{I}_2 &= 3.23\angle 47.73^\circ \text{A} \end{aligned}$$



§7.3 理想变压器

变压器广泛应用于电子、电气等领域，它是磁耦合现象的典型应用。通常由两个具有互感的线圈组成，其中一个线圈与电源相接，称为原边线圈或**初级线圈**，另外一个线圈与负载相接，称为副边线圈或**次级线圈**。变压器的原边线圈和副边线圈没有电气上的连接，它们利用磁耦合来实现能量的传输、信号的传递或者两者兼而有之。

7.3.1 变压器的理想化模型

实际变压器理想化的条件

① 无能量损耗

- 制作线圈的导线无电阻
- 芯子的磁导率无限大

② 全耦合

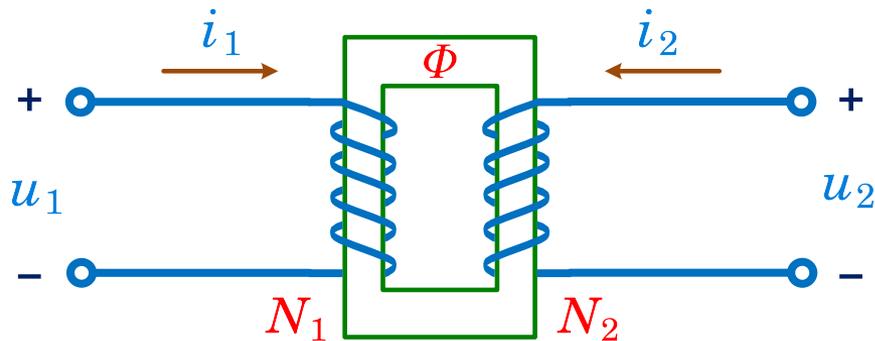
- 初级线圈和次级线圈磁通完全交链
即：耦合系数为 $k=1$ ，没有漏磁

③ 参数无限大

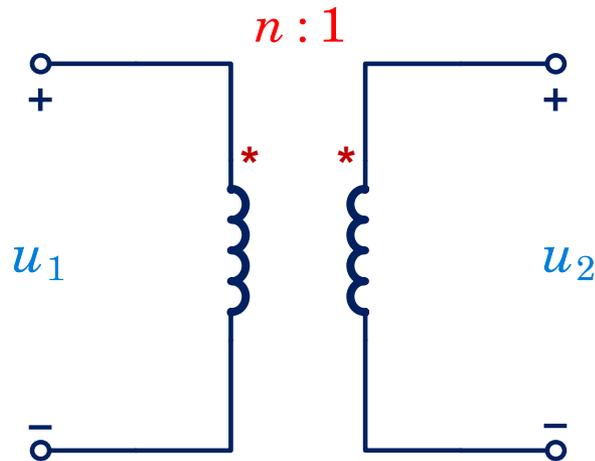
- 自感系数和互感系数趋于无穷大
且满足：

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

匝数比： n



实际变压器



理想变压器电路模型

7.3.2 理想变压器的主要性能

■ 磁通关系

电流 i_1 产生的磁通为 Φ_{11}

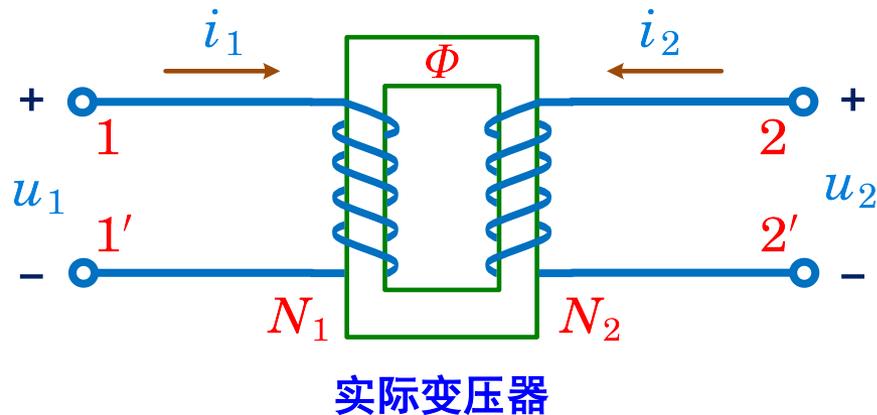
电流 i_2 产生的磁通为 Φ_{22}

线圈 1-1' 通过的磁通 Φ_1

线圈 2-2' 通过的磁通 Φ_2

不存在漏磁（全耦合）时

$$\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{11} + \Phi_{22}$$



■ 感应电压

$$\text{线圈 } 1-1': u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\text{线圈 } 2-2': u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$



$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$



改变匝数比
实现变压

7.3.2 理想变压器的主要性能

■ 变压器分类

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$



改变匝数比
实现变压

隔离变压器: $n = 1$

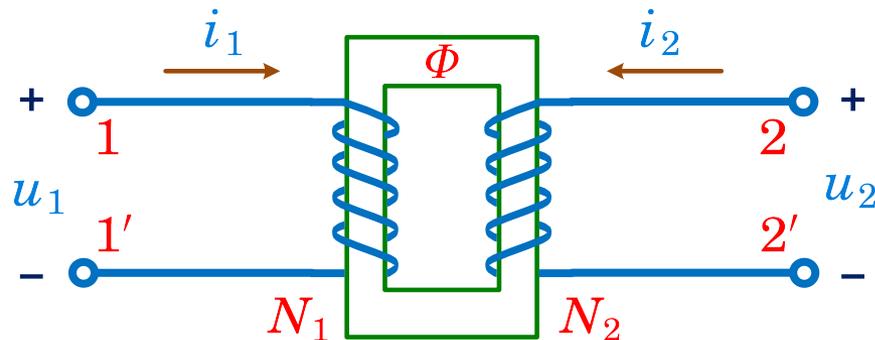
升压变压器: $n < 1$

降压变压器: $n > 1$

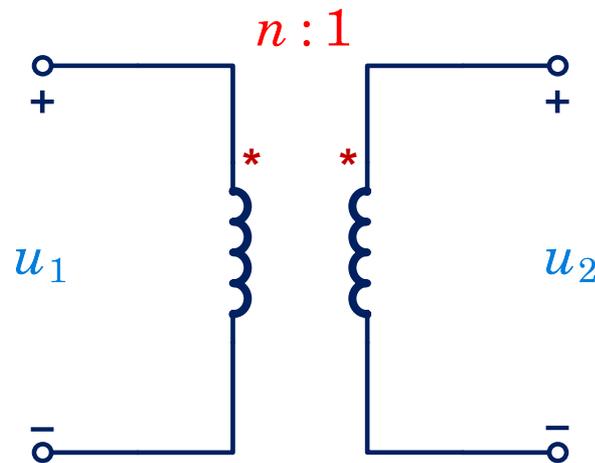
■ 变压器的额定值表示方法

$$U_1/U_2$$

举例: 2400V/220V



实际变压器



理想变压器电路模型

7.3.2 理想变压器的主要性能

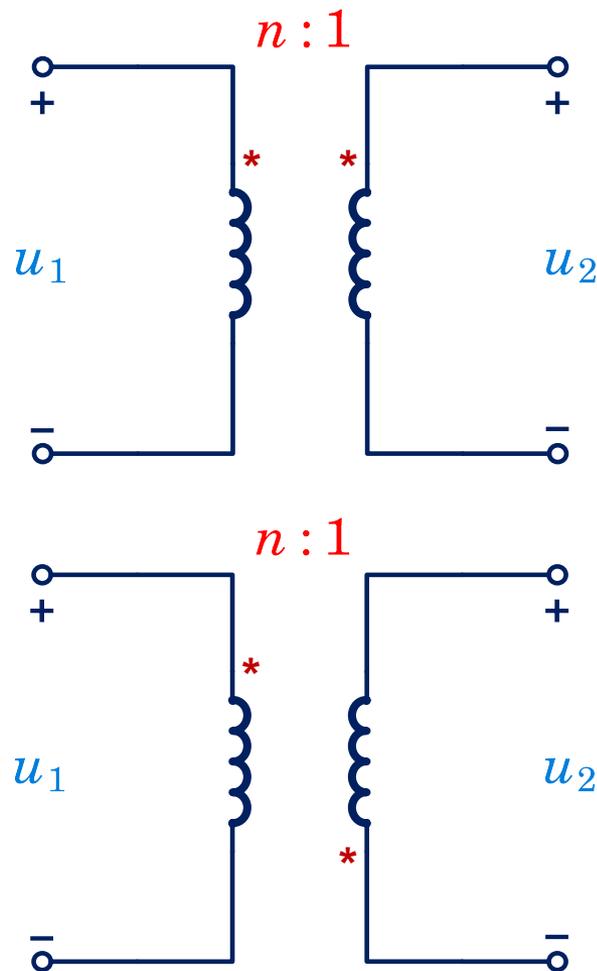
■ 变压关系与参考方向

- ◇ 与电流参考方向无关
- ◇ 若电压“+”极设在同名端

$$\frac{u_1}{u_2} = n$$

- ◇ 若电压“+”极分设同、异名端

$$\frac{u_1}{u_2} = -n$$



理想变压器电路模型

7.3.2 理想变压器的主要性能

■ 电流关系

◇ 根据功率守恒

$$p_{\text{左发}} = u_1 i_1$$

$$p_{\text{右吸}} = u_2 i_2$$

$$\ggg u_1 i_1 = u_2 i_2$$

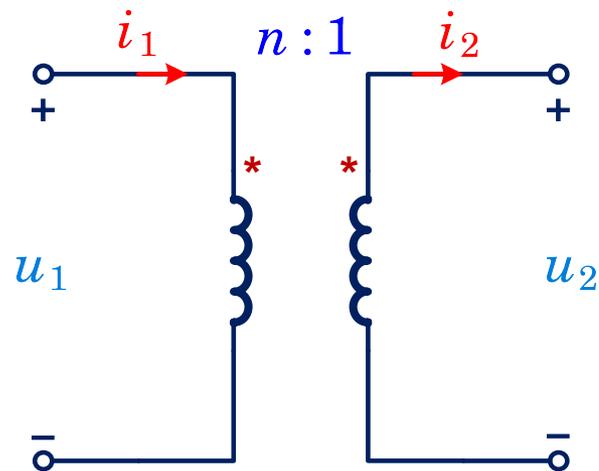
$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{n}$$

\ggg

改变匝数比
实现变流



$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{n}$$



理想变压器电路模型

7.3.2 理想变压器的主要性能

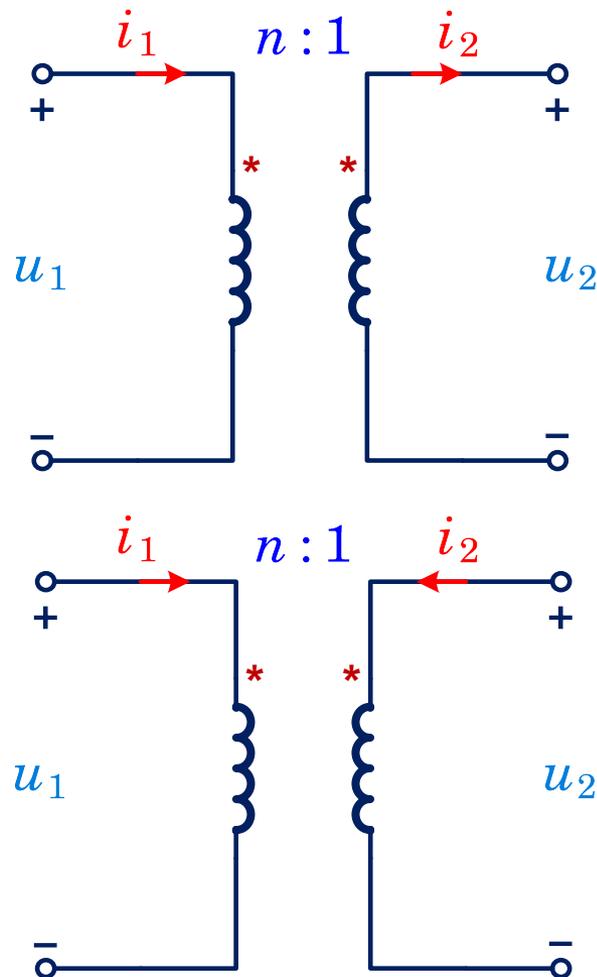
■ 变流关系与参考方向

- ◇ 与电压参考方向无关
- ◇ 若电流一个同名端流入
另一个同名端流出

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{n}$$

- ◇ 若电流从同名端同时流入/流出

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{n}$$



理想变压器电路模型

7.3.2 理想变压器的主要性能

■ 变阻抗关系

✧ 由图可知

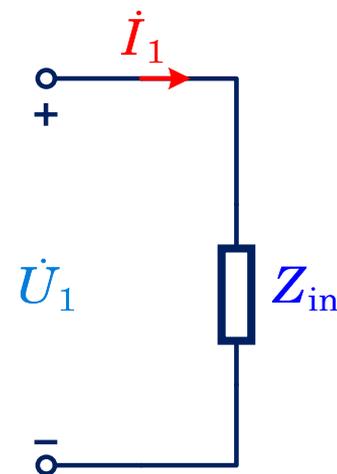
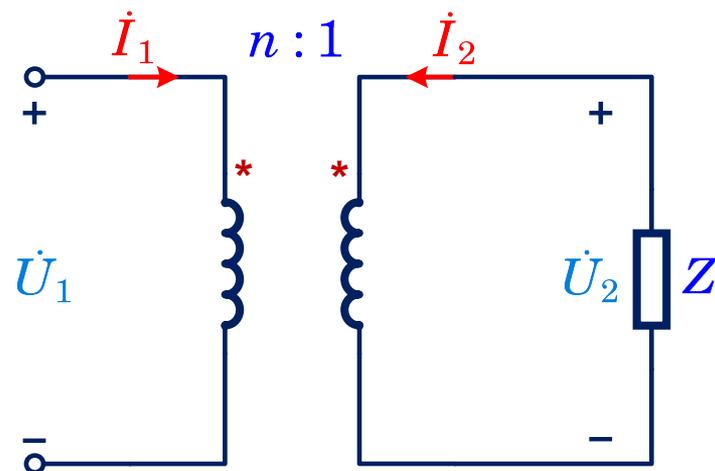
$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{1}{n} \quad \dot{U}_2 = -Z\dot{I}_2$$

✧ 反射阻抗

• 次级对初级的折合等效阻抗

$$Z_{\text{in}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{(-1/n)\dot{I}_2} = n^2 Z$$

✧ 理想变压器只改变阻抗大小，不改变阻抗性质





7.3.2 理想变压器的主要性能

■ 相关结论

- ① 理想变压器具有**变电压**、**变电流**、**变阻抗**的特性
- ② 理想变压器既不存储能量，也不消耗能量，只起传递作用
- ③ 理想变压器的特性方程为代数关系，是**无记忆多端元件**



7.3.3 含理想变压器电路的分析

■ 方法1

- ✧ 利用理想变压器的理想化条件以及变电压、变电流特性
- ✧ 应用相量法分析

■ 方法2

- ✧ 利用理想变压器的变阻抗特性，将副边阻抗折算到原边，消灭电路中的理想变压器
- ✧ 应用相量法分析

7.3.3 含理想变压器电路的分析

例7-4

例 图示电路中，已知 $\dot{U}_s = 60\angle 0^\circ \text{V}$ ，请计算负载电阻上的电压 \dot{U}_2 。

解 方法 1

列原边回路的 KVL 方程

$$1 \times \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{U}_s$$

列副边回路的 KVL 方程

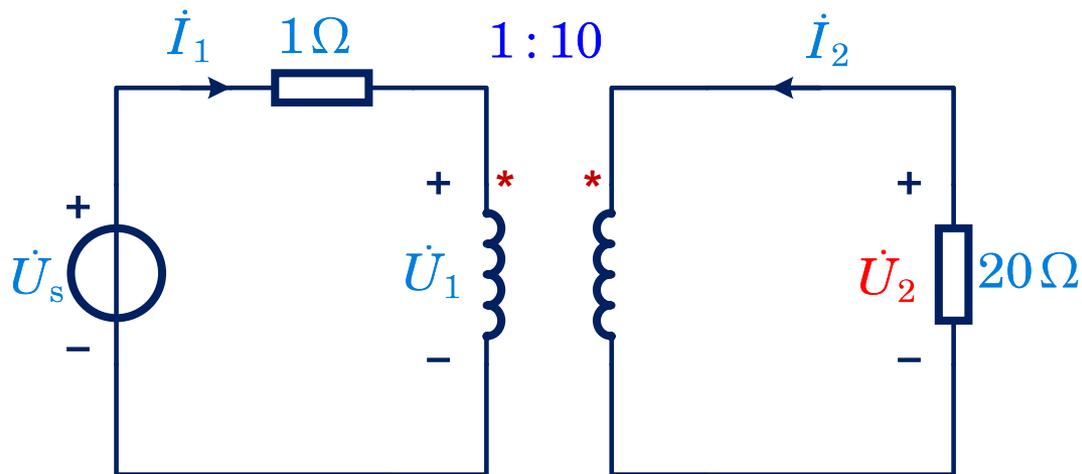
$$20 \times \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0$$

理想变压器的特性方程

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{10} \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{10}{1}$$

联立求解

$$\dot{U}_2 = 100\angle 0^\circ \text{V}$$



7.3.3 含理想变压器电路的分析

例7-4

例 图示电路中，已知 $\dot{U}_s = 60\angle 0^\circ \text{V}$ ，请计算负载电阻上的电压 \dot{U}_2 。

解 方法 2

绘制变阻抗的原边等效电路
反射阻抗

$$Z_{in} = n^2 Z$$

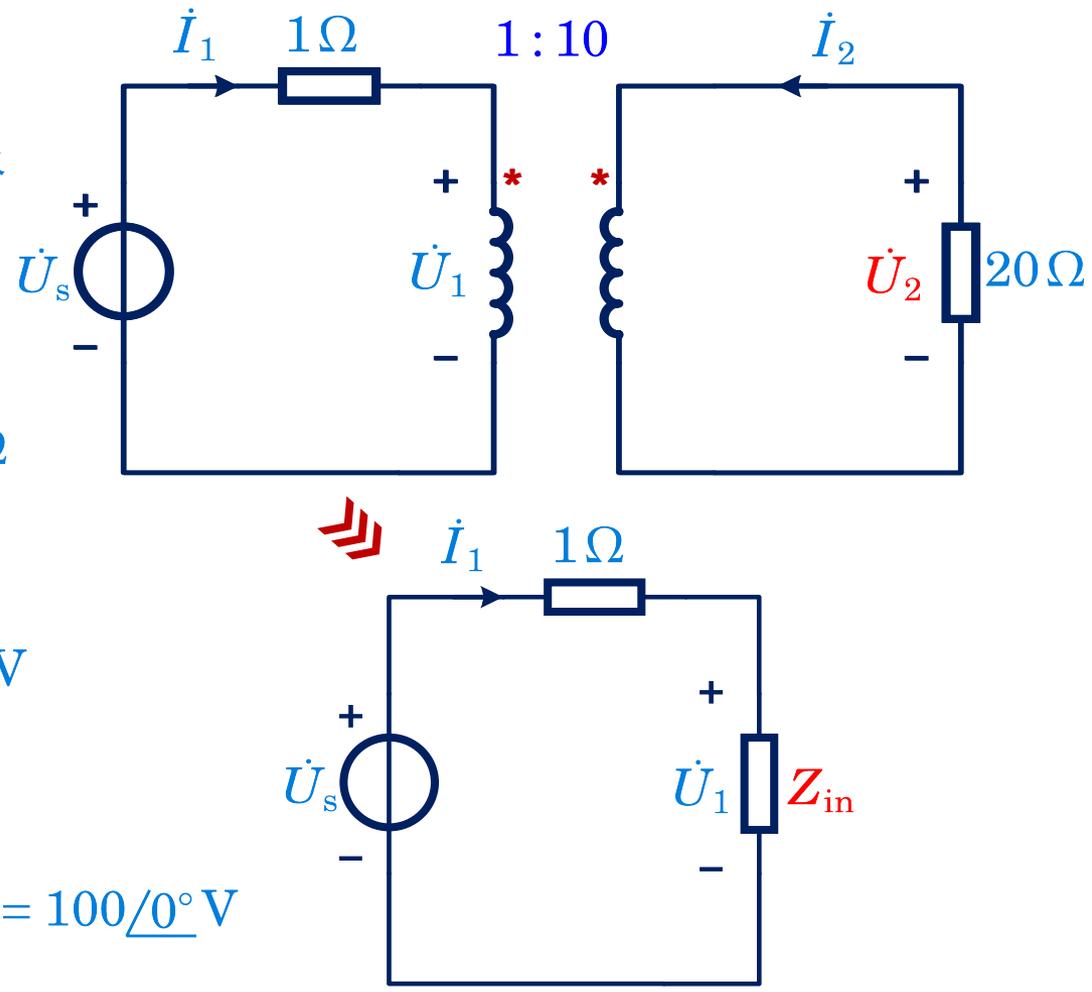
$$= \frac{1}{10^2} \times 20 \Omega = 0.2 \Omega$$

根据串联阻抗的分压公式

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{in}}{1 + Z_{in}} \dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{V}$$

理想变压器的特性方程

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \dot{U}_2 = 10\dot{U}_1 = 100\angle 0^\circ \text{V}$$





7.4 二端口网络

研究网络的两对端子之间的 VCR 关系，这两对端子中通常一对为输入端子，另一对为输出端子。

意义：大型复杂网络，如集成电路，一旦封装后，应用者对其内部结构和元件特性难以确定，其性能可以通过网络端子的电压、电流来测试和分析。

应用：互感器、变压器、晶体管放大器、滤波网络、通信网络等。



7.4.1 二端口网络的定义

■ 一端口或二端网络

- ◇ 向外引出一对端子的电路或网络
- ◇ 特点：一个端子流入的电流 = 另一个端子流出的电流
 - 电阻、电感、电容、独立电源等

■ 二端口网络

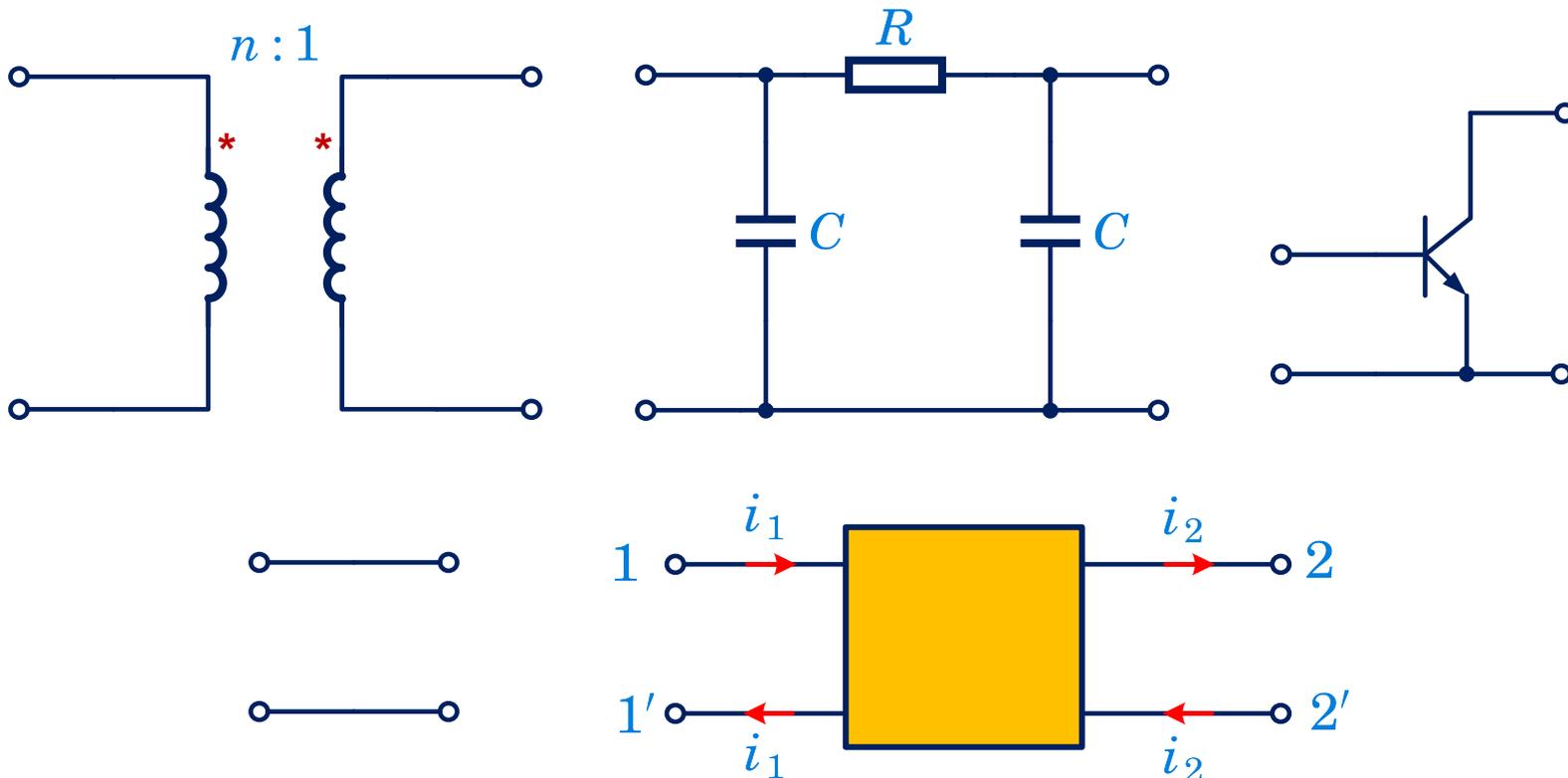
- ◇ 包含两对端子的网络
 - 变压器、滤波器、三极管放大电路、传输线、二端口网络等

7.4.1 二端口网络的定义

二端口网络

包含两对端子的网络

- 变压器、滤波器、三极管放大电路、传输线、二端口网络等





7.4.1 二端口网络的定义

■ 二端口网络

◇ 包含两对端子的网络

- 变压器、滤波器、三极管放大电路、传输线、二端口网络等

■ 分析方法

◇ 仅考虑两个端口处的电流、电压关系——网络参数

- 这些参数由二端口本身的元件和连接方式决定
- 这些参数可以作为不同二端口网络的性能评价指标

◇ 仅考虑不含独立电源的线性二端口网络

- 当研究其动态过程时，内部储能元件的初始状态假定为0——零状态响应



7.4.2 二端口网络方程和参数

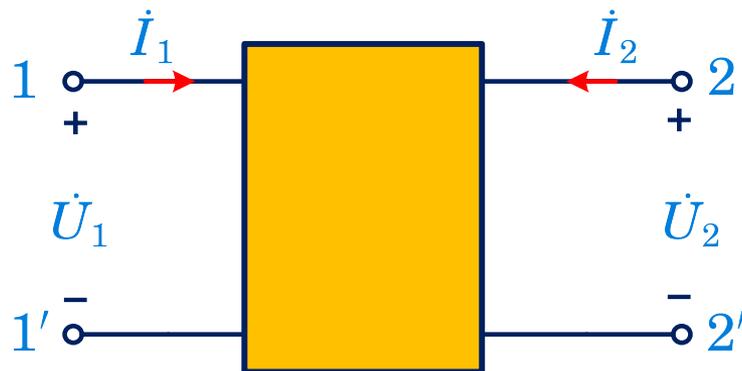
■ 分类

- ◇ 阻抗方程和 Z 参数
- ◇ 导纳方程和 Y 参数
- ◇ 混合方程和 H 参数
- ◇ 传输方程和 T 参数

7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 阻抗方程和Z参数

- ✧ 若端口电流已知，利用替代定理将端口电流视作外施独立电流源
- ✧ 根据叠加定理，端口电压等于各电流源单独作用产生的电压之和



$$\text{阻抗方程} \begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \ggg \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

- ☞ 也称为 Z 参数方程
 - ☞ 二端口网络的 Z 参数
 - ☞ Z 参数的量纲：Ω
- $$\left\{ \begin{array}{l} Z_{11}: \text{端口 } 2-2' \text{ 开路时, 端口 } 1-1' \text{ 的输入阻抗} \\ Z_{21}: \text{端口 } 2-2' \text{ 开路时, 端口 } 1 \rightarrow 2 \text{ 的转移阻抗} \\ Z_{12}: \text{端口 } 1-1' \text{ 开路时, 端口 } 2 \rightarrow 1 \text{ 的转移阻抗} \\ Z_{22}: \text{端口 } 1-1' \text{ 开路时, 端口 } 2-2' \text{ 的输入阻抗} \end{array} \right.$$

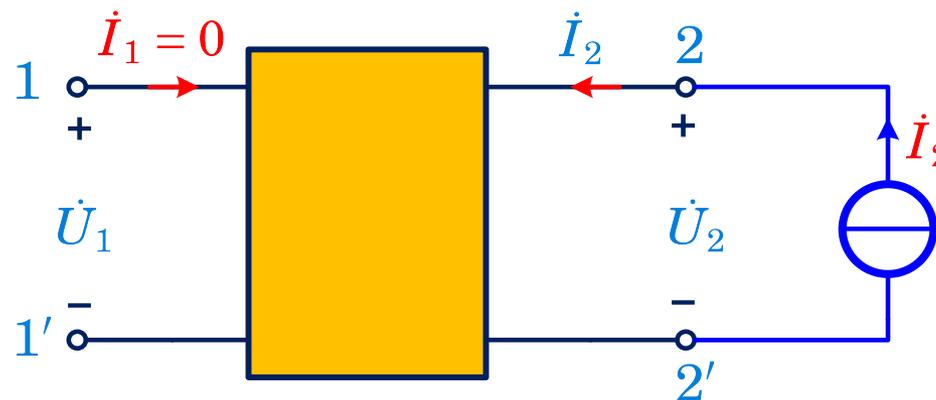
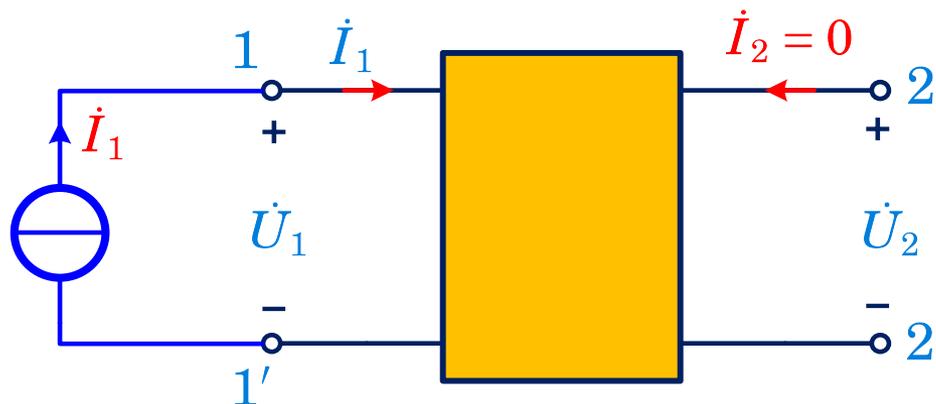
7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 阻抗方程和Z参数

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

✧ **Z参数计算**: 试验测量法

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} \\ Z_{21} &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} \\ Z_{12} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} \\ Z_{22} &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} \end{aligned}$$



开路阻抗参数的测定

7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-5

例 求图示 T 形二端口网络的 Z 参数，设阻抗 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 为已知量。

解 方法 1：试验测量法

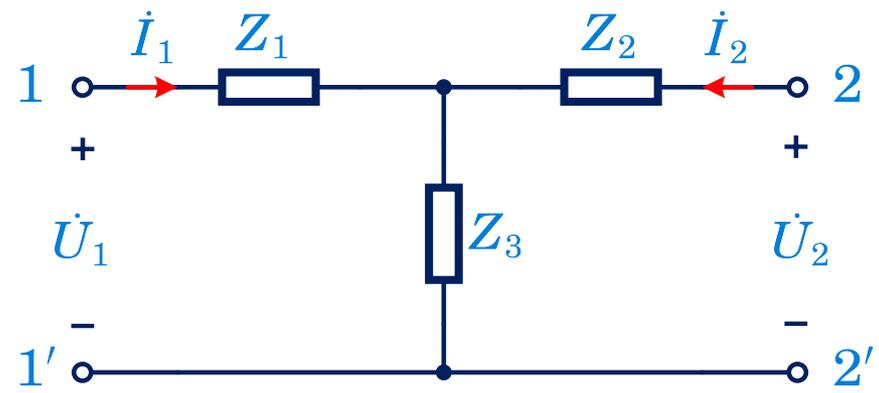
由输入阻抗和转移阻抗公式

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{(Z_1 + Z_3)\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{Z_3\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = Z_3$$

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = \frac{Z_3\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_3$$

$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = \frac{(Z_2 + Z_3)\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_2 + Z_3$$



» Z 参数矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-5

例 求图示 T 形二端口网络的 Z 参数，设阻抗 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 为已知量。

解 方法 2：网孔电流法

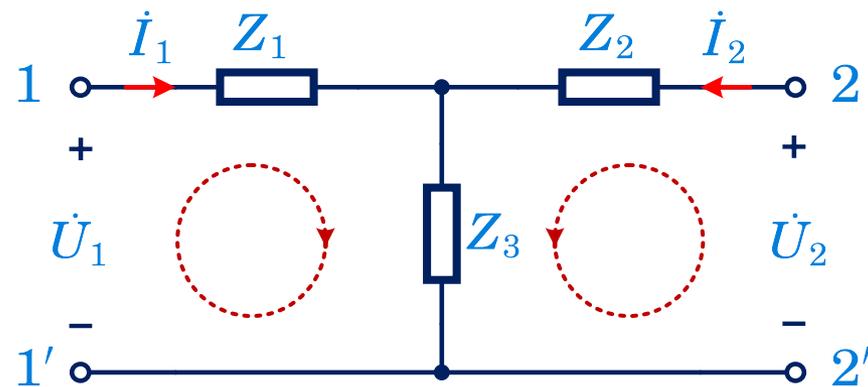
列图示两个网孔的网孔电流方程

$$\dot{U}_1 = (Z_1 + Z_3)\dot{I}_1 + Z_3\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_3\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2$$

»» Z 参数矩阵

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$



✧ **T形电路求Z参数，尤其含受控源时，网孔电流法列方程更简单**



7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 关于Z参数的说明

✧ 对于线性RLC组成的无源二端口网络，可证明

$$Z_{12} = Z_{21}$$

- 这样的二端口网络称为**互易二端口网络**
- 含有受控源时，该结论不一定成立

✧ 若还满足

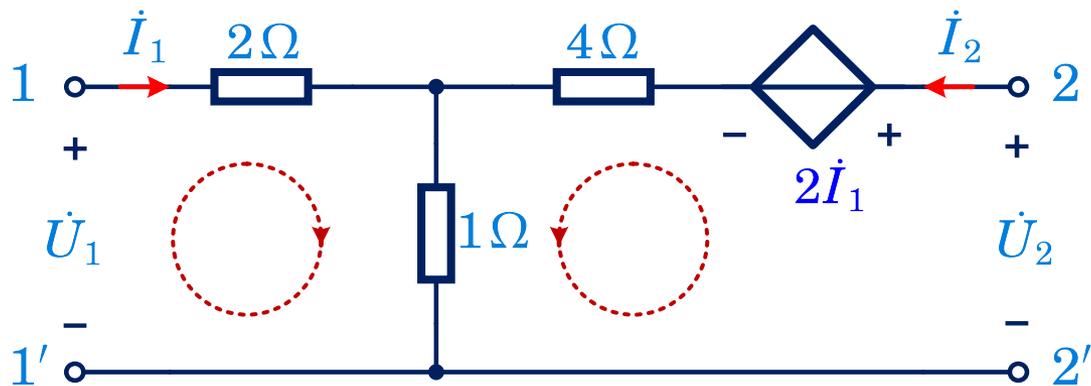
$$Z_{11} = Z_{22}$$

- 这样的二端口网络称为**对称互易二端口网络（电气对称）**
- 此时，两个端口互换位置与外电路连接，外部特性不变
- 结构对称一定电气对称，反之不然

7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-6

例 求图示 T 形二端口网络的 Z 参数。



解 采用网孔电流法

$$\dot{U}_1 = (2 + 1)\dot{I}_1 + 1 \cdot \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = 2\dot{I}_1 + 1 \cdot \dot{I}_1 + (4 + 1)\dot{I}_2$$



$$\dot{U}_1 = 3\dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

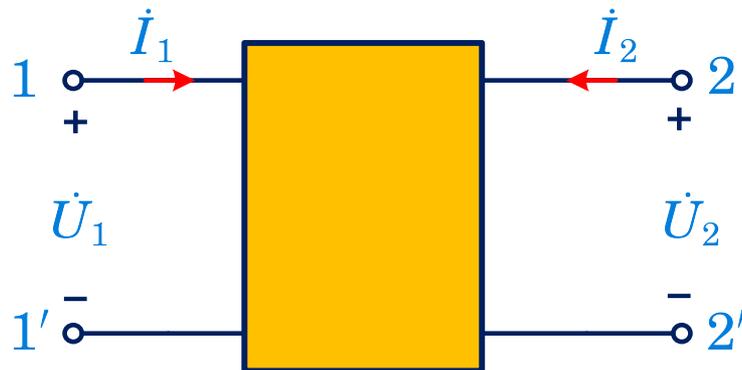
$$\dot{U}_2 = 3\dot{I}_1 + 5\dot{I}_2$$

Z 参数矩阵
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Omega$$

7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 导纳方程和Y参数

- ✧ 若端口电压已知，利用替代定理将端口电压视作外施独立电压源
- ✧ 根据叠加定理，端口电流等于各电压源单独作用产生的电流之和



$$\text{导纳方程} \begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \ggg \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

- ☞ 也称为 Y 参数方程
 - ☞ 二端口网络的 Y 参数
 - ☞ Y 参数的量纲：S
- $$\left\{ \begin{array}{l} Y_{11}: \text{端口 } 2-2' \text{ 短路时, 端口 } 1-1' \text{ 的输入导纳} \\ Y_{21}: \text{端口 } 2-2' \text{ 短路时, 端口 } 1 \rightarrow 2 \text{ 的转移导纳} \\ Y_{12}: \text{端口 } 1-1' \text{ 短路时, 端口 } 2 \rightarrow 1 \text{ 的转移导纳} \\ Y_{22}: \text{端口 } 1-1' \text{ 短路时, 端口 } 2-2' \text{ 的输入导纳} \end{array} \right.$$

7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 导纳方程和Y参数

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

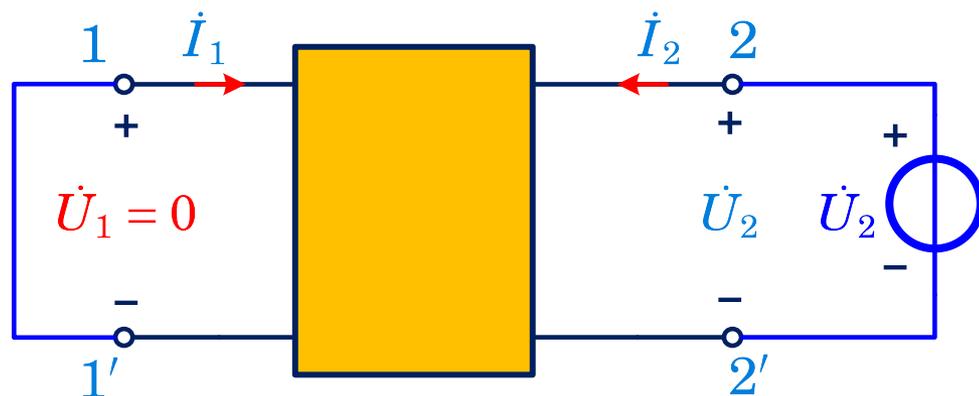
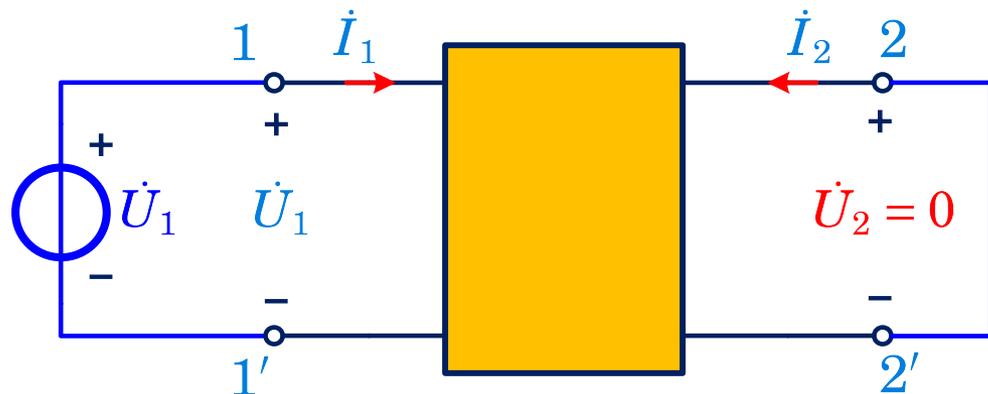
✧ **Y参数计算**: 试验测量法

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$$

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$$



短路导纳参数的测定



7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-7

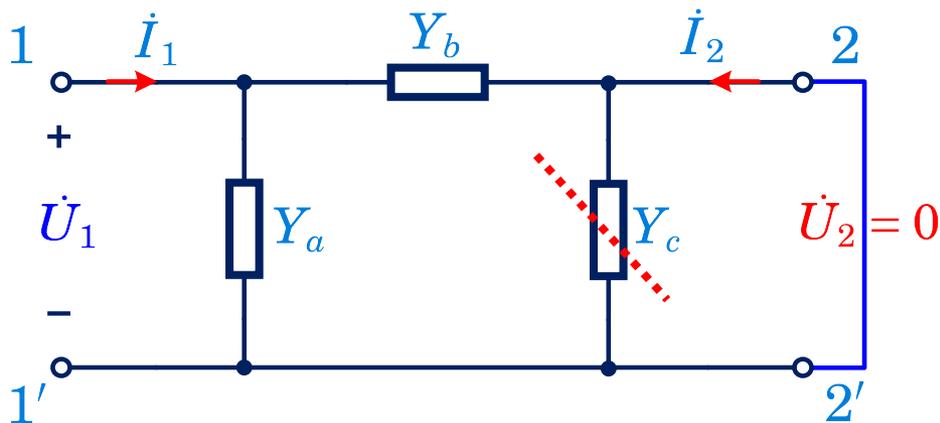
例 求图示 π 形二端口网络的 Y 参数。

解 方法 1: 试验测量法

由输入导纳和转移导纳公式

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{(Y_a + Y_b)\dot{U}_1}{\dot{U}_1} = Y_a + Y_b$$

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{Y_b\dot{U}_1}{\dot{U}_1} = -Y_b$$



7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-7

例 求图示 π 形二端口网络的 Y 参数。

解 方法 1: 试验测量法

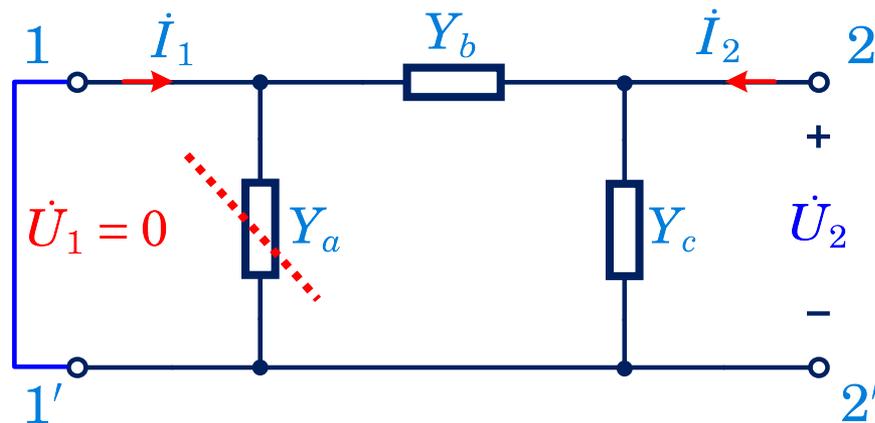
由输入导纳和转移导纳公式

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = Y_a + Y_b$$

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = -Y_b$$

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{Y_b \dot{U}_2}{\dot{U}_2} = -Y_b$$

$$Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{(Y_b + Y_c) \dot{U}_2}{\dot{U}_2} = Y_b + Y_c$$



»» Y 参数矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ -Y_b & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-7

例 求图示 π 形二端口网络的 Y 参数。

解 方法 2：结点电压法

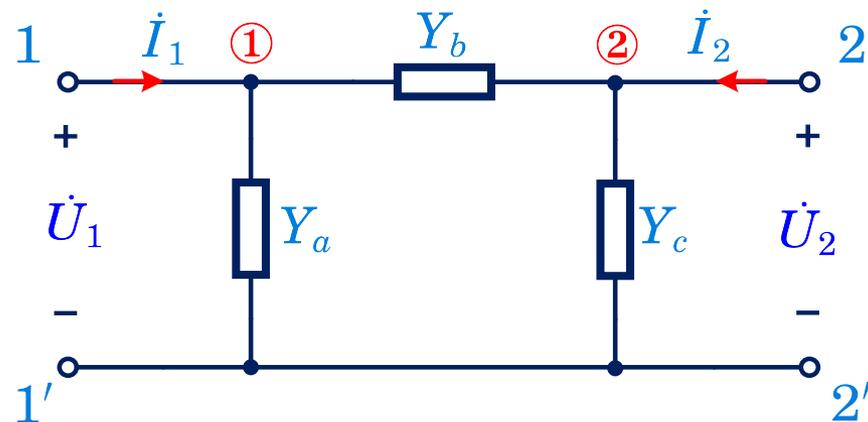
列图示两个结点电压方程

$$\dot{I}_1 = (Y_a + Y_b)\dot{U}_1 - Y_b\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = -Y_b\dot{U}_1 + (Y_b + Y_c)\dot{U}_2$$

»» Y 参数矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ -Y_b & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

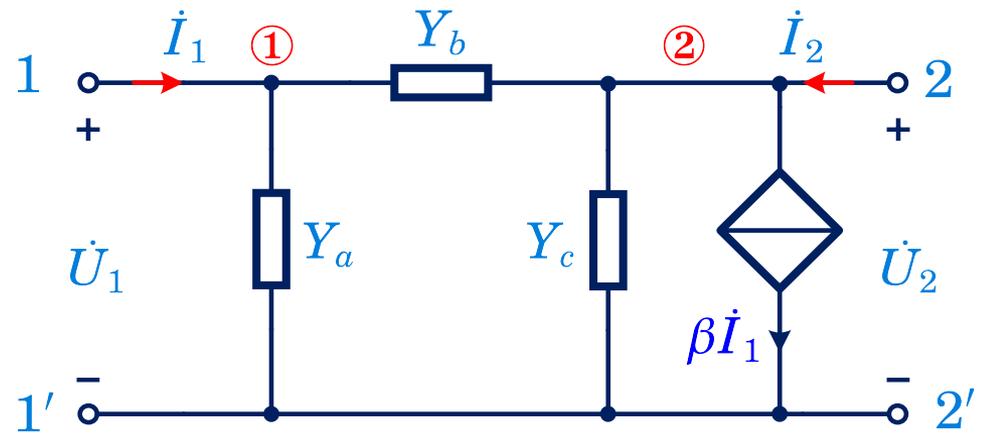


✧ **π 形电路求 Y 参数，尤其含受控源时，结点电压法列方程更简单**

7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-8

例 求图示 π 形二端口网络的 Y 参数。



解 采用结点电压法

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (Y_a + Y_b)\dot{U}_1 - Y_b\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 - \beta\dot{I}_1 = -Y_b\dot{U}_1 + (Y_b + Y_c)\dot{U}_2 \end{cases}$$

»» Y 参数矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ \beta Y_a + (\beta - 1)Y_b & (1 - \beta)Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

»»
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (Y_a + Y_b)\dot{U}_1 - Y_b\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = [\beta Y_a + (\beta - 1)Y_b]\dot{U}_1 + [(1 - \beta)Y_b + Y_c]\dot{U}_2 \end{cases}$$



7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 关于Y参数的说明

✧ 对于线性RLC组成的无源二端口网络，可证明

$$Y_{12} = Y_{21}$$

- 这样的二端口网络称为**互易二端口网络**
- 含有受控源时，该结论不一定成立

✧ 若还满足

$$Y_{11} = Y_{22}$$

- 这样的二端口网络称为**对称互易二端口网络（电气对称）**
- 此时，两个端口互换位置与外电路连接，外部特性不变
- 结构对称一定电气对称，反之不然

✧ 开路阻抗矩阵Z和短路导纳矩阵Y互为逆矩阵

$$Z = Y^{-1} \quad Y = Z^{-1}$$

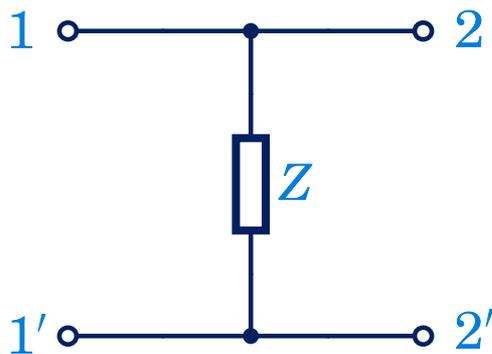
7.4.2 二端口网络方程和参数

■ Z参数和Y参数的比较

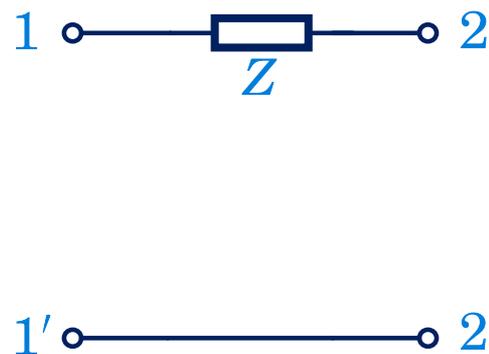
◇ 都可以描述一个二端口网络的端口外特性

- 如果是T形网络，先求Z参数，再用互逆关系求Y参数
- 如果是 π 形网络，先求Y参数，再用互逆关系求Z参数

◇ 有些特殊的二端口网络，Z参数和Y参数只有一种存在



只有Z参数



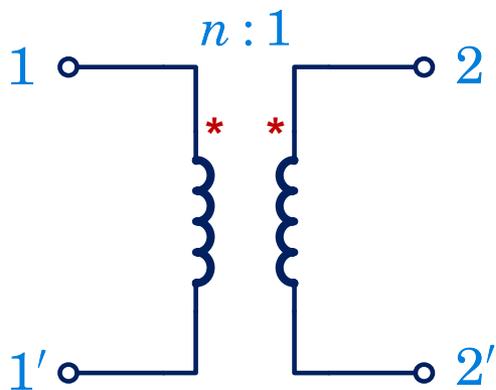
只有Y参数



7.4.2 二端口网络方程和参数

■ Z参数和Y参数的比较

- ◇ 都可以描述一个二端口网络的端口外特性
 - 如果是T形网络，先求Z参数，再用互逆关系求Y参数
 - 如果是 π 形网络，先求Y参数，再用互逆关系求Z参数
- ◇ 有些特殊的二端口网络，Z参数和Y参数只有一种存在
- ◇ 有些特殊的二端口网络，Z参数和Y参数均不存在

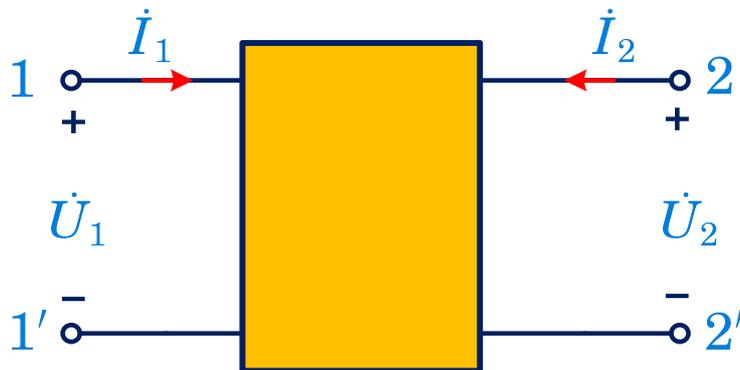


Z参数和Y参数均不存在

7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 混合方程和H参数

- ✧ 利用替代定理，两个端口其中一个施电流源，另一个施加电压源
- ✧ 根据叠加定理，端口电压/电流等于电流源/电压源单独作用产生的电压/电流之和



$$\text{混合方程} \begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \ggg \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

- ☞ 也称为 H 参数方程
- ☞ 二端口网络的 H 参数

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11}: \text{端口 } 2-2' \text{ 短路时, 端口 } 1-1' \text{ 的输入阻抗} \\ H_{21}: \text{端口 } 2-2' \text{ 短路时, 端口 } 2 \rightarrow 1 \text{ 的电流比} \\ H_{12}: \text{端口 } 1-1' \text{ 开路时, 端口 } 1 \rightarrow 2 \text{ 的电压比} \\ H_{22}: \text{端口 } 1-1' \text{ 开路时, 端口 } 2-2' \text{ 的输入导纳} \end{array} \right.$$



7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 混合方程和H参数

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

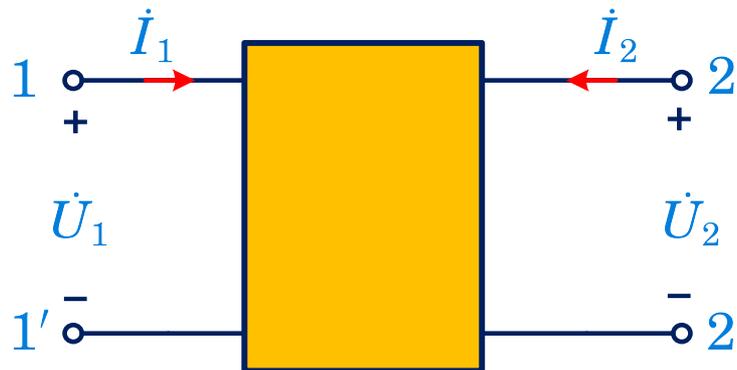
✧ **H参数计算**: 试验测量法

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$

$$H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$

$$H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}$$

$$H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}$$



✧ 互易二端口网络: $H_{21} = -H_{12}$

✧ 对称二端口网络: $H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1$

7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-9

例 图示电路为某晶体管小信号工作条件下的简化等效电路，求其 H 参数。

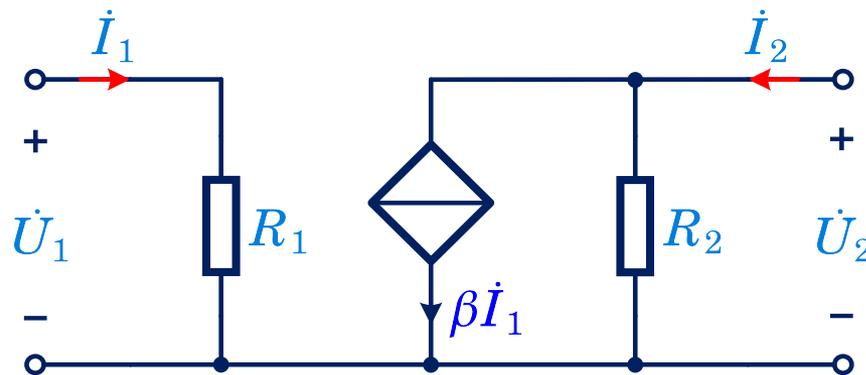
解 直接列出电压电流关系方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = \beta \dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_2}{R_2} \end{cases}$$

对比混合方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2 \end{cases}$$

H 参数矩阵 $H = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ \beta & 1/R_2 \end{bmatrix}$

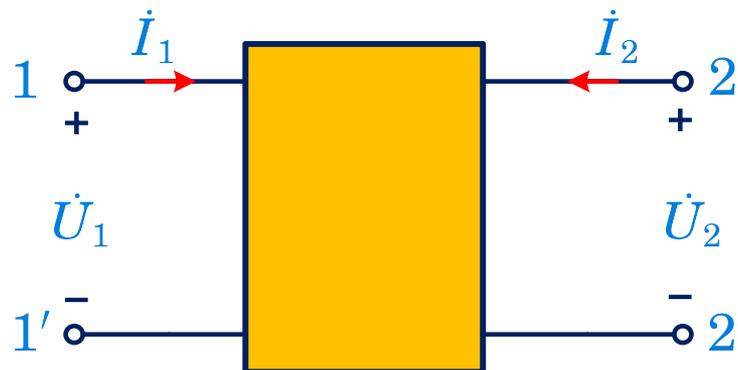


7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 传输方程和T参数

✧ 电力和电信传输中常用

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$



$$\text{传输方程} \begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases} \ggg \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

- ☞ 也称为 T 参数方程
- ☞ 二端口网络的 T 参数
 - A : 端口 2-2' 开路时, 端口 1 → 2 的电压比
 - C : 端口 2-2' 开路时, 端口 2 → 1 的转移导纳
 - B : 端口 2-2' 短路时, 端口 2 → 1 的转移阻抗
 - D : 端口 2-2' 短路时, 端口 1 → 2 的电流比



7.4.2 二端口网络方程和参数

■ 传输方程和T参数

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

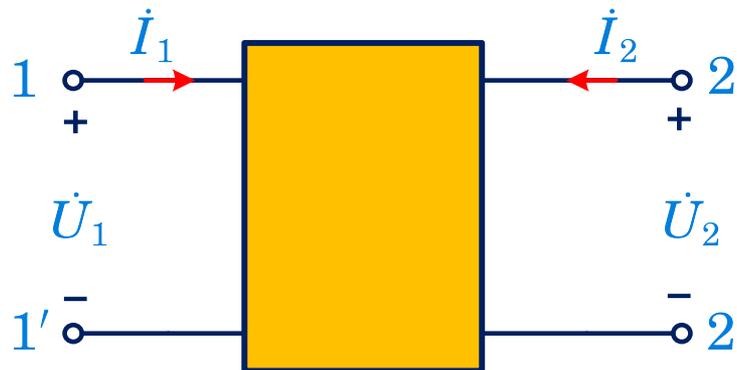
✧ **T参数计算**: 试验测量法

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0}$$

$$C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_2=0}$$

$$B = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$

$$D = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0}$$



✧ 互易二端口网络: $AD - BC = 1$

✧ 对称二端口网络: $A = D$

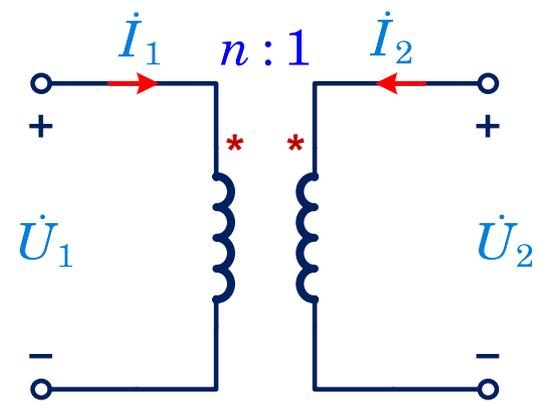
7.4.2 二端口网络方程和参数

例7-10

例 求图示理想变压器的 T 参数。

解 根据理想变压器端口特性

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$



对比传输方程

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

T 参数矩阵 $T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$

二端口网络4种参数之间的关系

参数	Z	Y	H	T
Z	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_H & H_{12} \\ -H_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \Delta_T \\ 1 & D \end{bmatrix}$
Y	$\frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -H_{12} \\ H_{21} & \Delta_H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\Delta_T \\ -1 & A \end{bmatrix}$
H	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_Z & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} & \Delta_Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \Delta_T \\ -1 & C \end{bmatrix}$
T	$\frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & \Delta_Z \\ 1 & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} -Y_{22} & -1 \\ -\Delta_Y & -Y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{H_{21}} \begin{bmatrix} -\Delta_H & -H_{11} \\ -H_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$



7.4.3 二端口网络的连接

■ 二端口网络的含义

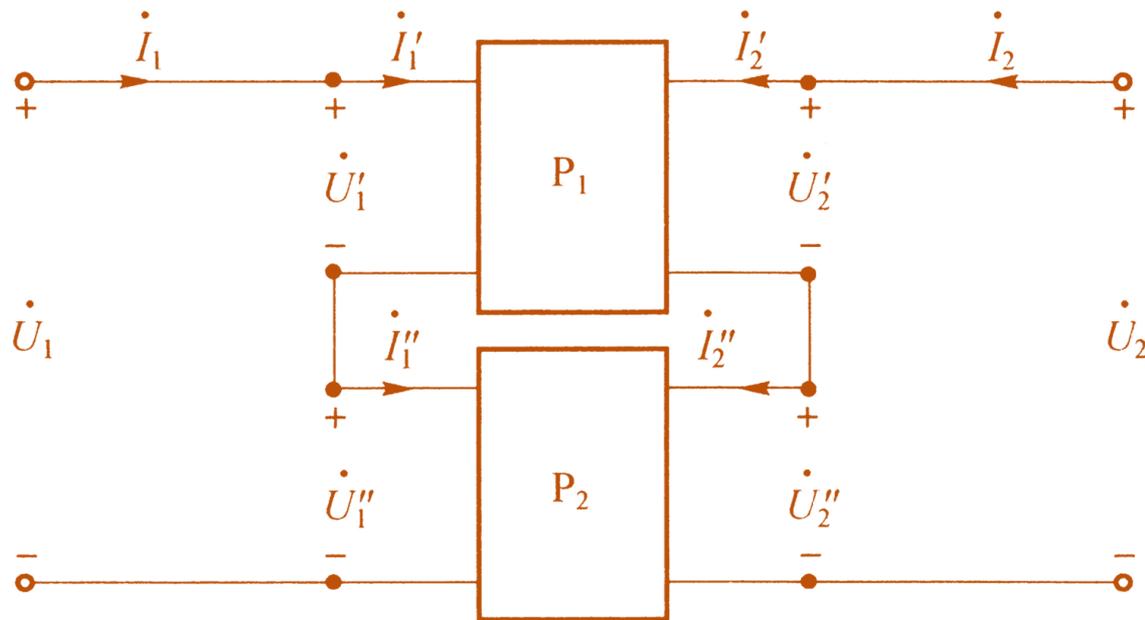
- ◇ 将复杂网络看成由若干个子网络组成
- ◇ 这些子网络可以通过二端口进行建模

■ 二端口网络的连接方式

- ◇ 串联
- ◇ 并联
- ◇ 级联

7.4.3 二端口网络的连接：串联

二端口网络的串联



输入、输出电流满足

$$\dot{I}'_1 = \dot{I}''_1 = \dot{I}_1$$

$$\dot{I}'_2 = \dot{I}''_2 = \dot{I}_2$$

输入、输出电压满足

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1$$

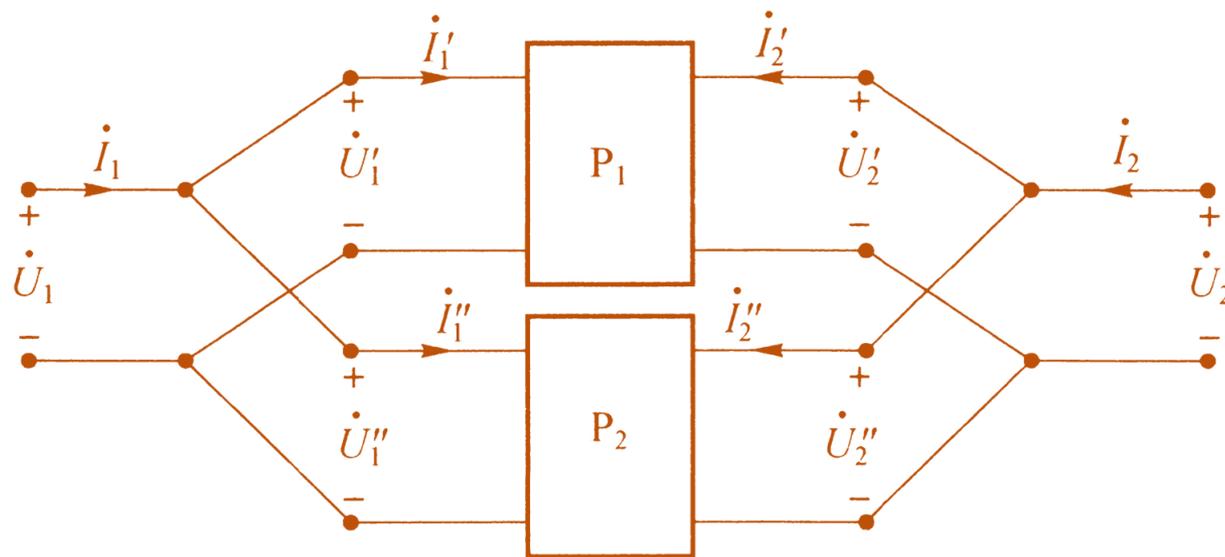
$$\dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Z}'' \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'') \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Z 参数矩阵: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}''$

7.4.3 二端口网络的连接：并联

二端口网络的并联



输入、输出电压满足

$$\dot{U}'_1 = \dot{U}''_1 = \dot{U}_1$$

$$\dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 = \dot{U}_2$$

输入、输出电流满足

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1$$

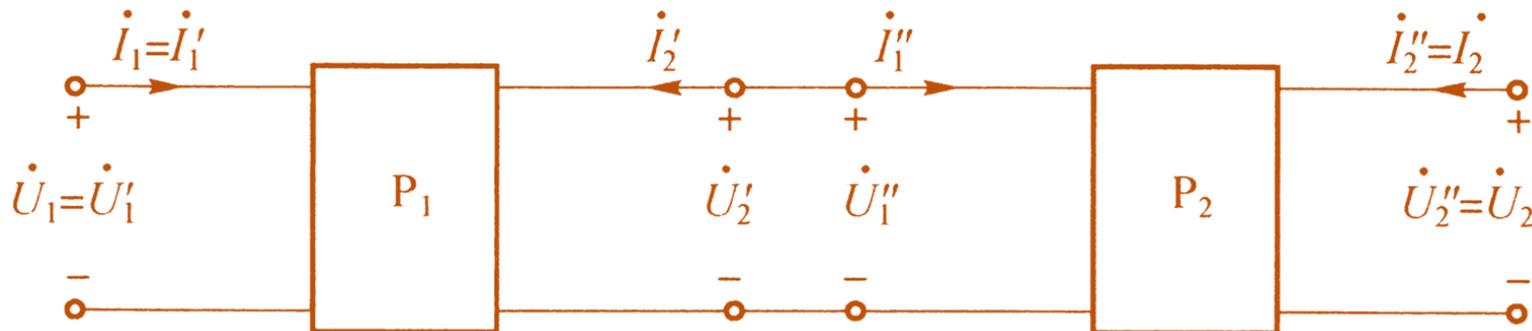
$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = Y' \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + Y'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = (Y' + Y'') \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

Y 参数矩阵: $Y = Y' + Y''$

7.4.3 二端口网络的连接：级联

■ 二端口网络的级联



输入、输出电压满足 $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1$ $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_1$ $\dot{U}''_2 = \dot{U}_2$

输入、输出电流满足 $\dot{I}_1 = \dot{I}'_1$ $\dot{I}'_2 = -\dot{I}''_1$ $\dot{I}''_2 = \dot{I}_2$

✧ 设 $T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ $T'' = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$ \gggg

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{bmatrix} = T'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{bmatrix}$$

7.4.3 二端口网络的连接：级联

■ 二端口网络的级联

输入、输出电压满足 $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1$ $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_1$ $\dot{U}''_2 = \dot{U}_2$

输入、输出电流满足 $\dot{I}_1 = \dot{I}'_1$ $\dot{I}'_2 = -\dot{I}''_1$ $\dot{I}''_2 = \dot{I}_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'\mathbf{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'\mathbf{T}'' \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

T 参数矩阵： $\mathbf{T} = \mathbf{T}'\mathbf{T}''$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{bmatrix}$$

7.4.3 二端口网络的连接：级联

例7-11

例 求图示二端口网络的 T 参数矩阵。

解 分别计算子网络的 T 参数

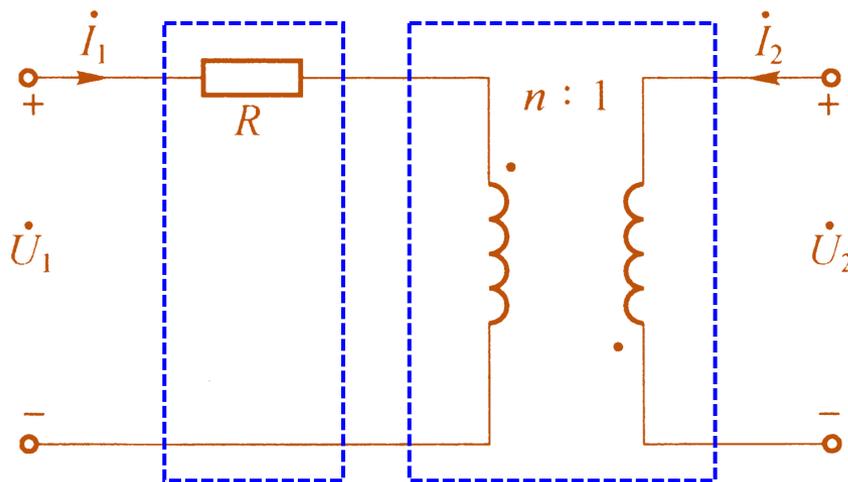
$$T' = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T'' = \begin{bmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

级联后二端口网络的 T 参数矩阵

$$\begin{aligned} T = T' T'' &= \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -n & -\frac{R}{n} \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

两个二端口网络级联



7.4.3 二端口网络的连接：级联

例7-12

例 求图示二端口网络的 Y 参数矩阵。

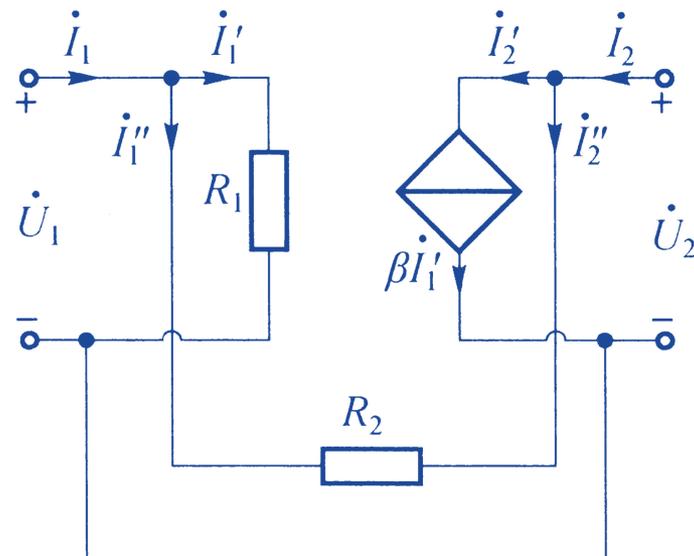
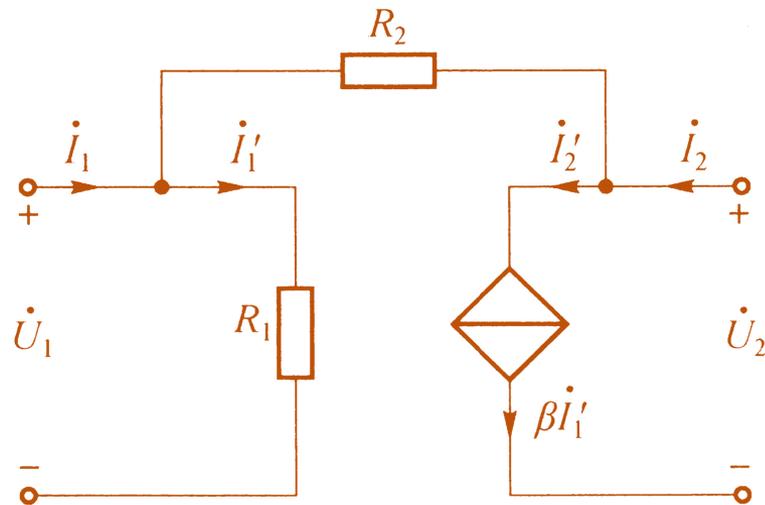
解 分解为两个二端口网络并联，第 1 个

$$\begin{aligned} I'_1 &= \frac{1}{R_1} \dot{U}_1 \\ I'_2 &= \beta I'_1 = \frac{\beta}{R_1} \dot{U}_1 \end{aligned} \quad \ggg \quad Y' = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{\beta}{R_1} & 0 \end{bmatrix}$$

第 2 个

$$Y''_{11} = \left. \frac{I''_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{1}{R_2} \quad Y''_{12} = \left. \frac{I''_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{R_2}$$

$$Y''_{21} = \left. \frac{I''_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{R_2} \quad Y''_{22} = \left. \frac{I''_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{1}{R_2}$$





7.4.3 二端口网络的连接：级联

例7-12

例 求图示二端口网络的 Y 参数矩阵。

解

$$Y' = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{\beta}{R_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y''_{11} = \frac{I_1''}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{1}{R_2} \quad Y''_{12} = \frac{I_1''}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{R_2}$$

$$Y''_{21} = \frac{I_2''}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{R_2} \quad Y''_{22} = \frac{I_2''}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} = \frac{1}{R_2}$$



$$Y = Y' + Y'' = \begin{bmatrix} (R_1 + R_2)/R_1 R_2 & -1/R_2 \\ (\beta R_2 - R_1)/R_1 R_2 & 1/R_2 \end{bmatrix}$$



7.4.4 二端口网络的等效电路

■ 等效的含义

- ◇ 用一个简单的二端口电路模型来等效无源二端口网络
 - 该模型的方程与原二端口网络的方程相同
 - 根据不同的网络参数和方程可以得到结构完全不同的等效电路

■ 分类

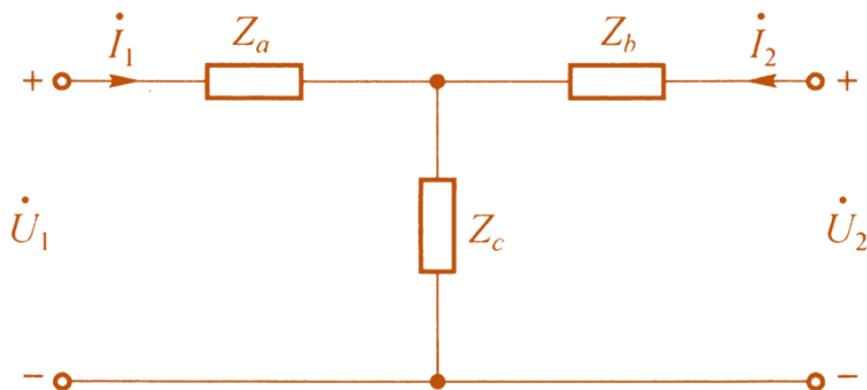
- ◇ 互易二端口网络的等效电路
- ◇ 一般二端口网络的等效电路（互易以外的）



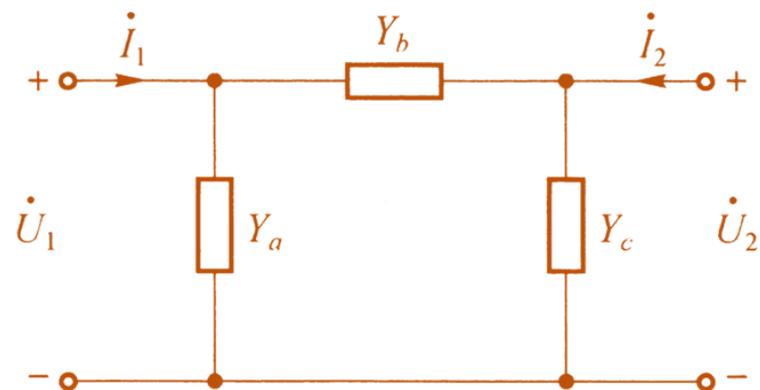
7.4.4 二端口网络的等效电路

互易二端口网络的等效电路

- 特点： $Z_{12} = Z_{21}$ $Y_{12} = Y_{21}$
- 在Z或者Y参数矩阵中，仅有3个独立参数
- 可用T形电路或者π形电路进行等效



T形等效电路



π形等效电路



7.4.4 二端口网络的等效电路

■ 互易二端口网络的等效电路

◇ T形等效电路

已知二端口网络 Z 参数矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

用 T 形电路进行等效，则

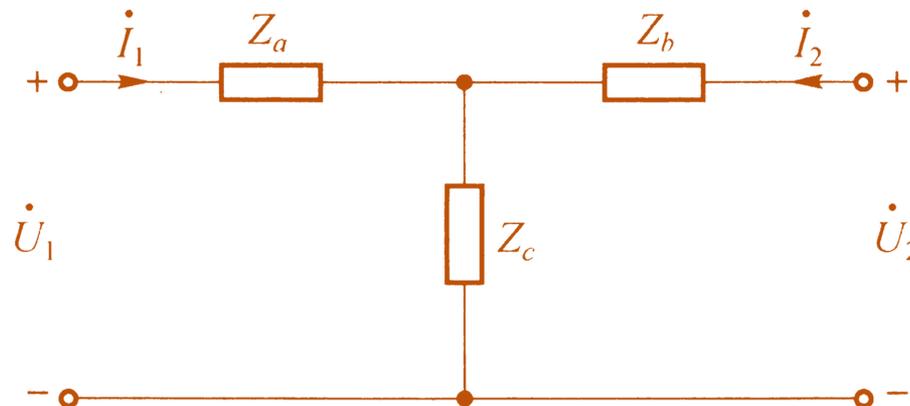
$$Z_{11} = Z_a + Z_c$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_c$$

$$Z_{22} = Z_b + Z_c$$



$$\begin{aligned} Z_a &= Z_{11} - Z_{12} \\ Z_b &= Z_{22} - Z_{12} \\ Z_c &= Z_{12} \end{aligned}$$



7.4.4 二端口网络的等效电路

例7-13

例 已知互易二端口网络 Z 参数矩阵为 $Z = \begin{bmatrix} 6 & -j4 \\ -j4 & 8 \end{bmatrix} \Omega$, $\dot{U}_s = 100\angle 0^\circ \text{V}$, $R_L = 12\Omega$, 计算图示电路的电流 i 。

解 先用 T 形电路进行等效, 计算

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = (6 + j4)\Omega$$

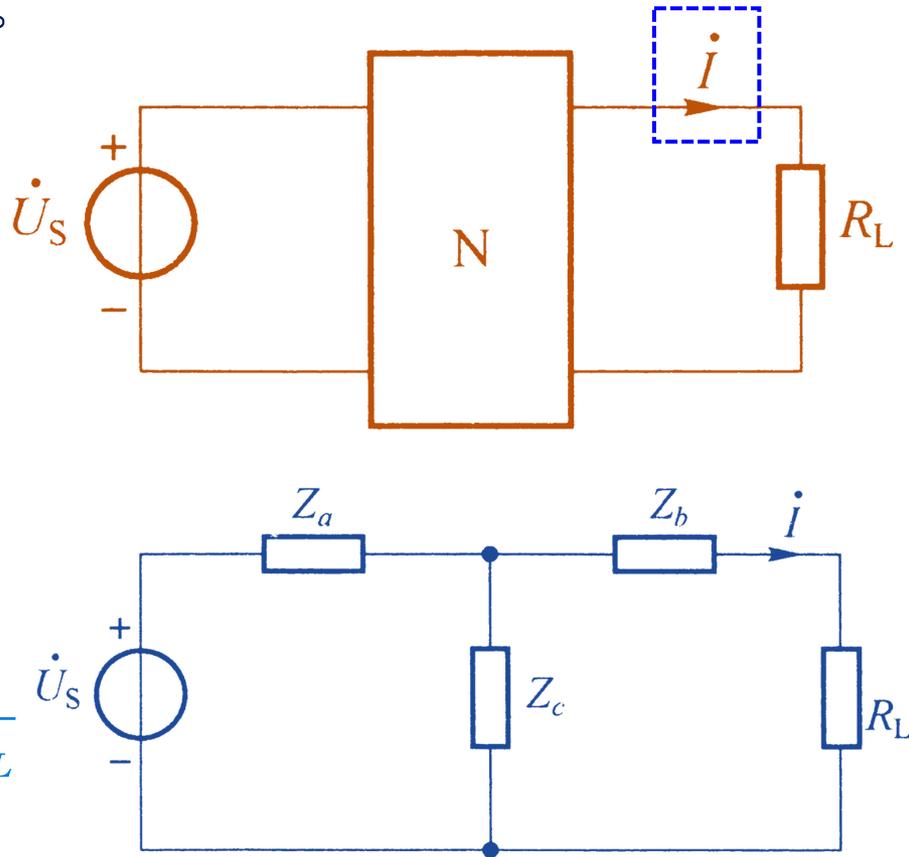
$$Z_b = Z_{22} - Z_{12} = (8 + j4)\Omega$$

$$Z_c = Z_{12} = -j4\Omega$$

由串、并联关系和分压公式

$$i = \frac{(Z_b + R_L) \parallel Z_c}{(Z_b + Z_L) \parallel Z_c + Z_a} \cdot \dot{U}_s \cdot \frac{1}{Z_b + R_L}$$

$$= 2.94\angle -90^\circ \text{A}$$



7.4.4 二端口网络的等效电路

互易二端口网络的等效电路

π形等效电路

已知二端口网络 Y 参数矩阵

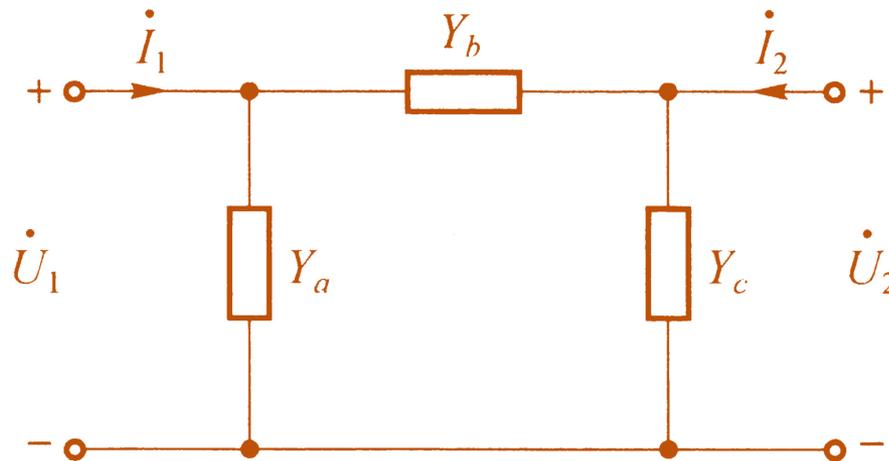
$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

用 π 形电路进行等效，则

$$Y_{11} = Y_a + Y_b$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_b \quad \ggg$$

$$Y_{22} = Y_b + Y_c$$



$$\begin{aligned} Y_a &= Y_{11} + Y_{12} \\ Y_b &= -Y_{12} \\ Y_c &= Y_{12} + Y_{22} \end{aligned}$$

说明

✧ T形和π形等效电路可互换，其他参数可根据与Z和Y的关系获得

7.4.4 二端口网络的等效电路

例7-14

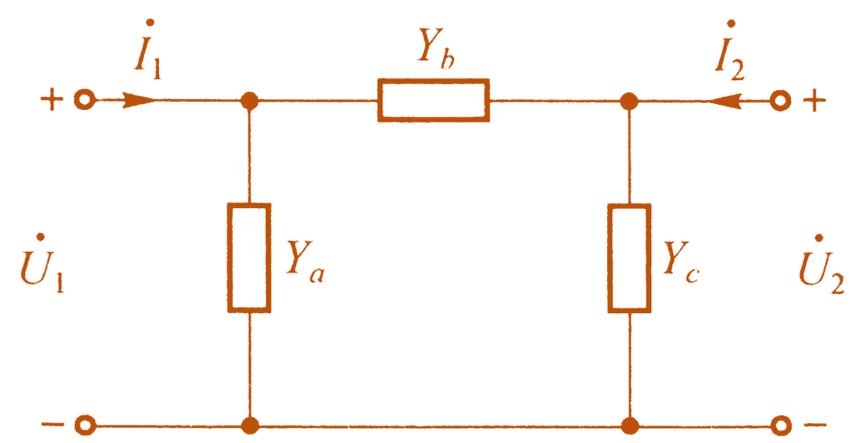
例 已知互易二端口网络的 Y 参数矩阵为 $Y = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} S$ ，求其 π 形等效电路。

解 先画出 π 形等效电路，并计算

$$Y_a = Y_{11} + Y_{21} = (5 - 3)S = 2S$$

$$Y_b = -Y_{21} = 3S$$

$$Y_c = Y_{22} + Y_{21} = (2 - 3)S = -1S$$





7.4.4 二端口网络的等效电路

- 一般二端口网络的等效电路（含受控源的二端口网络）
 - ◇ 除去互易二端口之外的二端口网络
 - ◇ 可以用 Z 参数表示的等效电路进行等效
 - ◇ 可以用 Y 参数表示的等效电路进行等效

7.4.4 二端口网络的等效电路

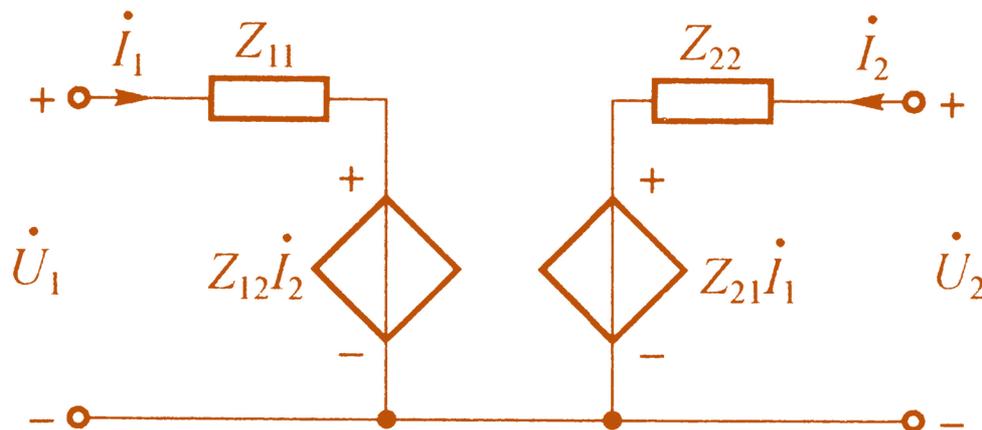
■ 一般二端口网络的等效电路（含受控源的二端口网络）

◇ 用Z参数表示的等效电路

◇ **方法一**：直接由Z参数方程得到等效电路（**2个等效受控源**）

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2$$





7.4.4 二端口网络的等效电路

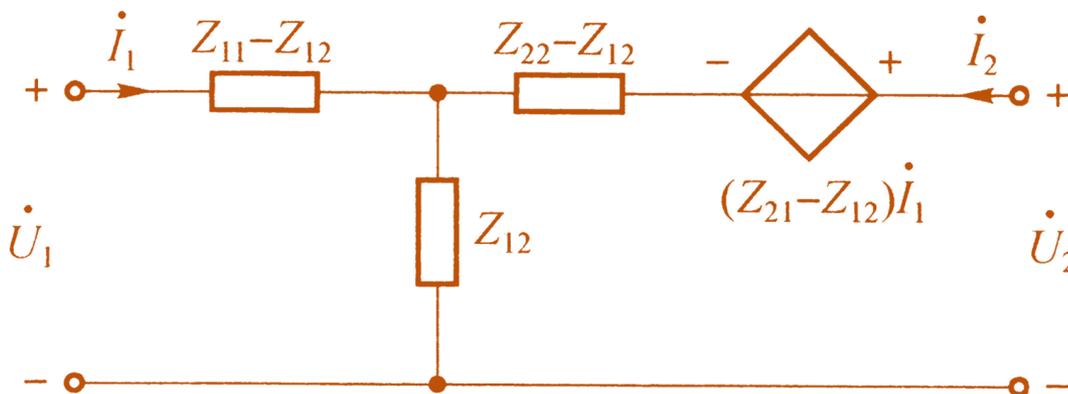
■ 一般二端口网络的等效电路（含受控源的二端口网络）

◇ 用Z参数表示的等效电路

◇ **方法二**：将Z参数方程变换后进行等效（1个等效受控源）

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = (Z_{11} - Z_{12})\dot{I}_1 + Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = Z_{12}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + (Z_{22} - Z_{12})\dot{I}_2 + (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1$$



7.4.4 二端口网络的等效电路

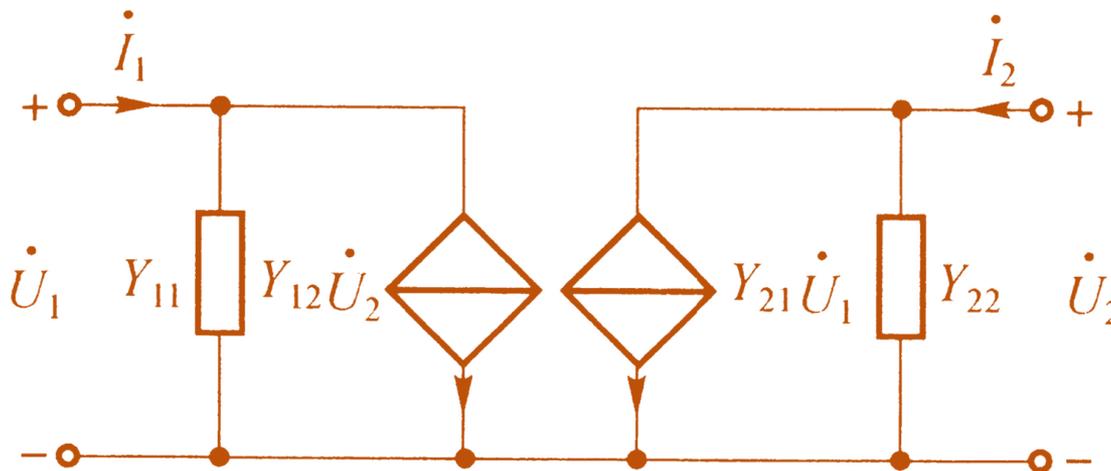
■ 一般二端口网络的等效电路（含受控源的二端口网络）

◇ 用Y参数表示的等效电路

◇ **方法一**：直接由Y参数方程得到等效电路（**2个等效受控源**）

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2$$



7.4.4 二端口网络的等效电路

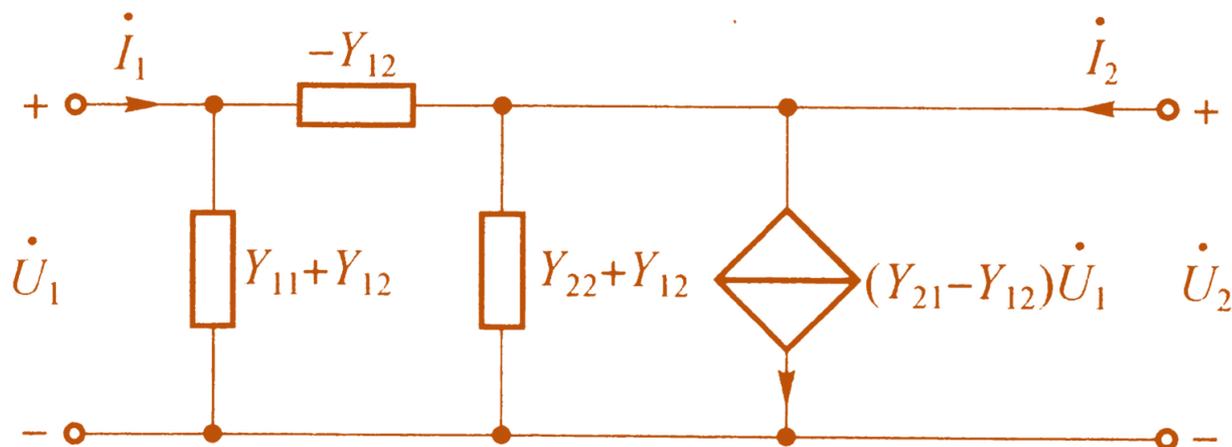
■ 一般二端口网络的等效电路（含受控源的二端口网络）

◇ 用Y参数表示的等效电路

◇ **方法二**：将Y参数方程变换后进行等效（1个等效受控源）

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = (Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1 - Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = -Y_{12}(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (Y_{22} + Y_{12})\dot{U}_2 + (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1$$





本章小结

■ 耦合电感

◇ 互感 同名端 耦合电感线圈上的VCR

■ 含耦合电感电路的分析 ▲

◇ 互感的去耦等效

◇ 含耦合电感电路分析

■ 理想变压器

◇ 理想化模型 主要性能 含理想变压器电路的分析

■ 二端口网络 ▲●

◇ 定义 方程和参数

◇ 连接 等效电路