1 状态空间模型

【1】某个具有软连接的单链路控制器，当忽略阻尼时，其非线性动力学方程由下式给出：

$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$
$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

其中 q_1 和 q_2 是角位置，I 和 J 是转动惯量，k 是弹簧系数，M 是总质量，L 是距离，u 是转动力矩输入。为该系统选择状态变量，并写出状态方程。

解： 选取状态变量为 $x_1 = q_1$，$x_2 = \dot{q}_1$，$x_3 = q_2$，$x_4 = \dot{q}_2$，则根据原方程可以得到如下状态空间模型：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u
\end{aligned}$$

【2】某个具有软连接的 m 连杆机器人的非线性动力学方程为：

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + h(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1 - q_2) = 0$$
$$J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) = u$$

其中 q_1 和 q_2 是 m 维广义坐标向量，$M(q_1)$ 和 J 是对称非奇异惯性矩阵，u 是 m 维控制输入，$h(q, \dot{q})$ 表示离心力、科里奥利力和重力，K 是联合弹簧系数的对角矩阵。为该系统选择状态变量，并写出状态方程。

解： 选取状态变量为 $x_1 = q_1$，$x_2 = \dot{q}_1$，$x_3 = q_2$，$x_4 = \dot{q}_2$，其中 $x_i \in R^m$，$i = 1,2,3,4$，则根据原方程可以得到如下状态空间模型：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -M^{-1}(x_1)[h(x_1, x_2) + K(x_1 - x_3)] \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= J^{-1}K(x_1 - x_3) + J^{-1}u
\end{aligned}$$

2 重要概念

【3】请写出完整的 $\varepsilon - \delta$ 描述的 Lyapunov 稳定性定义。

答： 设 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ 是包含原点的一个区域，$f(x)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的局部 Lipschitz 函数，且 $f(0) = 0$，则 $\dot{x} = f(x)$ 的平衡点 $x = 0$ 是：

- 稳定的，如果对于 $\forall \varepsilon > 0$，总是 $\exists \delta(\varepsilon) > 0$，使得

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- 不稳定的，如果上述平衡点稳定条件不成立；
- 渐近稳定的，如果该平衡点是稳定的，且可适当地选择 δ，使得

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

【4】请写出非线性时变系统一致有界和一致终极有界的定义。
答：考虑系统 $\dot{x} = f(t,x)$，则该系统的解是：

- 一致有界的，如果存在一个与 t_0 无关的数 $c > 0$，对于每个 $a \in (0,c)$，存在与 t_0 无关的 $\beta > 0$，使得
$$||x(t_0)|| \le a \quad \Rightarrow \quad ||x(t)|| \le \beta, \quad \forall t \ge t_0$$
- 一致终极有界的，如果存在与 t_0 无关的正常数 b 和 c，对每个 $a \in (0,c)$，存在 $T(a,b) \ge 0$，满足
$$||x(t_0)|| \le a \quad \Rightarrow \quad ||x(t)|| \le b, \quad \forall t \ge t_0 + T$$
其中，b 称为一个终极边界。
- 如果上述条件对于任意 a 均成立，则系统的解是全局一致（终极）有界的。

3 非线性系统分析

【5】已知某二阶非线性系统的状态空间模型如下

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

请求出该系统的所有平衡点，并确定各孤立平衡点的类型。
解：根据平衡点定义，令

$$-x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0$$
$$-x_1 - x_2 = 0$$

解得 $x_1 = 0,\ 1,\ -1$，$x_2 = -x_1 = 0,\ -1,\ 1$。故系统有 3 个孤立的平衡点 $(0,0)$，$(1,-1)$ 和 $(-1,1)$。先求线性化模型用到的 Jacobi 函数矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

那么，在平衡点 $(0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

计算其特征值为 $\lambda_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}$，这说明平衡点 $(0,0)$ 是稳定的焦点。在平衡点 $(1,-1)$ 和 $(-1,1)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-1,1)}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

计算其特征值为 $\lambda_{1,2}=2\pm2\sqrt{2}$，这说明平衡点 $(1,-1)$ 和 $(-1,1)$ 都是鞍点。

【6】已知某二阶非线性系统的状态空间模型如下

$$\dot{x}_1=2x_1-x_1x_2$$
$$\dot{x}_2=2x_1^2-x_2$$

请求出该系统的所有平衡点，并确定各孤立平衡点的类型。

解：根据平衡点定义，令

$$2x_1-x_1x_2=0$$
$$2x_1^2-x_2=0$$

解得 $x_1=0,\ 1,\ -1$，$x_2=2x_1^2=0,\ 2,\ 2$。故系统有 3 个孤立的平衡点 $(0,0)$，$(1,2)$ 和 $(-1,2)$。先求线性化模型用到的 Jacobi 函数矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}2-x_2 & -x_1\\ 4x_1 & -1\end{bmatrix}$$

那么，在平衡点 $(0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

计算其特征值为 $\lambda_{1,2}=2,\ -1$，这说明平衡点 $(0,0)$ 是鞍点。在平衡点 $(1,2)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

计算其特征值为 $\lambda_{1,2}=-(1/2)\pm\mathrm{j}\sqrt{15}/2$，这说明平衡点 $(1,2)$ 是稳定的焦点。在平衡点 $(-1,2)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-1,2)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}$$

计算其特征值为 $\lambda_{1,2}=-(1/2)\pm\mathrm{j}\sqrt{15}/2$，这说明平衡点 $(-1,2)$ 是稳定的焦点。

【7】已知某旋转刚性太空船的欧拉方程为

$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+u_1$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+u_2$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2+u_3$$

其中 ω_1、ω_2 和 ω_3 是角速度向量 ω 沿主轴的分量，u_1、u_2 和 u_3 是力矩输入在主轴的分量，J_1、J_2 和 J_3 是主转动惯量。

(1) 证明当 $u_1=u_2=u_3=0$ 时，原点 $\omega=0$ 是稳定的，它是渐近稳定的吗？

(2) 假设力矩输入运用反馈控制 $u_i=-k_i\omega_i$，其中 k_1、k_2 和 k_3 是正常数，证明闭环系统的原点是全局渐近稳定的。

证明：(1) 显然 $\omega=0$ 是该系统的平衡点。选取如下候选 Lyapunov 函数

$$V(\omega)=\frac{1}{2}(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2)$$

对其沿着开环系统（当 $u_1=u_2=u_3=0$ 时）的解求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}&=J_1\omega_1\dot{\omega}_1+J_2\omega_2\dot{\omega}_2+J_3\omega_3\dot{\omega}_3\\&=(J_2-J_3)\omega_1\omega_2\omega_3+(J_3-J_1)\omega_1\omega_2\omega_3+(J_1-J_2)\omega_1\omega_2\omega_3\\&=0\end{aligned}$$

根据稳定性定义，此时平衡点 $\omega=0$ 是稳定的。又因为 $\dot{V}=0$ 恒成立，故该平衡点不是渐近稳定的。

(2) 将反馈控制 $u_i=-k_i\omega_i$ 代入原系统方程，得到如下闭环系统方程

$$\begin{aligned}J_1\dot{\omega}_1&=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3-k_1\omega_1\\J_2\dot{\omega}_2&=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1-k_2\omega_2\\J_3\dot{\omega}_3&=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2-k_3\omega_3\end{aligned}$$

仍然使用第一问中的候选 Lyapunov 函数 $V(\omega)$，则对其沿着闭环系统的解求导推出

$$\dot{V}=-k_1\omega_1^2-k_2\omega_2^2-k_3\omega_3^2<0$$

又因为 $\lim_{\omega\to\infty}V(\omega)=\infty$，即 $V(\omega)$ 径向无界，所以闭环系统的原点是全局渐近稳定的。

【8】已知某质量—弹簧系统的动态方程为

$$M\ddot{y}=Mg-ky-c_1\dot{y}-c_2\dot{y}|\dot{y}|$$

其中 M 为弹簧末端质量块的质量，$k>0$ 为弹簧的胡克系数，$c_1>0$ 和 $c_2>0$ 为非线性黏滞阻尼系数。请证明此系统有全局渐近稳定的平衡点。

证明：令 $\ddot{y}=0$、$\dot{y}=0$，解得 $y=Mg/k$，即该二阶系统的平衡点为 $(Mg/k,0)$。选取状态变量 $x_1=y-Mg/k$、$x_2=\dot{y}$，则可以获得质量—弹簧系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\\dot{x}_2&=-\frac{k}{M}x_1-\frac{c_1}{M}x_2-\frac{c_2}{M}x_2|x_2|\end{aligned}$$

且平衡点被移到原点。选取如下候选 Lyapunov 函数

$$V(x)=ax_1^2+bx_2^2,\quad a>0,\ b>0$$

显然 $V(x)$ 是正定函数，且为径向无界。对 $V(x)$ 沿着状态方程的解求导可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2ax_1\dot{x}_1 + 2bx_2\dot{x}_2 \\
&= 2\left(a - \frac{bk}{M}\right)x_1x_2 - \frac{2bc_1}{M}x_2^2 - \frac{2bc_2}{M}x_2^2|x_2|
\end{aligned}
$$

取 $a = k/2$、$b = M/2$，则有

$$\dot{V}(x) = -c_1x_2^2 - c_2x_2^2|x_2| \le 0$$

又因为 $\dot{V} \equiv 0$ 时，必有 $x_2(t) \equiv 0$，将其代入状态方程有可推出 $x_1(t) \equiv 0$。利用 LaSalle 定理，状态方程的原点是全局渐近稳定的，即质量—弹簧系统的平衡点 $(Mg/k, 0)$ 是全局渐近稳定的。

【9】已知某二阶非线性系统的状态方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2 + u
\end{aligned}
$$

问：该系统是否为输入-状态稳定？给出证明过程。

答：该系统是输入-状态稳定的。证明如下：选取如下候选 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

对其沿着系统的解求导可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\
&= -(x_1^2 + x_2^2) + x_2u \\
&\le -\|x\|_2^2 + \|x\|_2|u| \\
&= -(1-\theta)\|x\|_2^2 - \theta\|x\|_2|u|
\end{aligned}
$$

当 $\|x\|_2 \ge |u|/\theta$，并取 $0 < \theta < 1$ 时，进一步可得

$$\dot{V} \le -(1-\theta)\|x\|_2^2 < 0$$

因此，该系统是输入-状态稳定的。

【10】已知某扰动系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + g(t, x)$$

其中，A 为 Hurwitz 矩阵，扰动项 $g(t,x)$ 满足线性增长条件 $\|g(t,x)\| \le \gamma\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$。请找出扰动系统全局指数稳定时 γ 的取值条件。

解：由于标称系统 $\dot{x} = Ax$ 是线性的，且 A 为 Hurwitz 矩阵，给定正定矩阵 Q，则 Lyapunov 方程 $PA + A^{\mathrm{T}}P = -Q$ 存在唯一正定解 P。若取二次型 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$，则必然有

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \le V(x) &\le \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \\
\frac{\partial V}{\partial x} \cdot Ax = -x^{\mathrm{T}}Qx &\le -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \\
\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| = \|2x^{\mathrm{T}}P\| \le 2\|P\| \cdot \|x\| &= 2\lambda_{\max}(P)\|x\|
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别为矩阵 P 的最大特征值和最小特征值。再对 $V(x)$ 沿扰动系统的解求导，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= \frac{\partial V}{\partial x}\cdot Ax + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot g(t,x)\\ &\le -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\gamma\|x\|^2\end{aligned}$$

由此可知，扰动系统全局指数稳定时 γ 的取值需满足

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$$

【11】考虑线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

其中 A 为 Hurwitz 矩阵。设 $G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$，证明系统的 L_2 增益上界为 $\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\|G(\mathrm{j}\omega)\|_2$。

证明： 记输入 $u(t)$ 的 Fourier 变换为 $U(\mathrm{j}\omega)$，输出 $y(t)$ 的 Fourier 变换为 $Y(\mathrm{j}\omega)$。则因果信号 $y\in L_2$ 时

$$Y(\mathrm{j}\omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

且

$$Y(\mathrm{j}\omega) = G(\mathrm{j}\omega)U(\mathrm{j}\omega)$$

由 Parseval 定理可写出

$$\begin{aligned}\|y\|_{L_2}^2 &= \int_0^\infty y^{\mathrm{T}}(t)y(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(\mathrm{j}\omega)Y(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U^*(\mathrm{j}\omega)G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)U(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\\ &\le (\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\|G(\mathrm{j}\omega)\|_2)^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U^*(\mathrm{j}\omega)U(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\\ &= (\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\|G(\mathrm{j}\omega)\|_2)^2\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}(t)u(t)\mathrm{d}t\\ &= (\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\|G(\mathrm{j}\omega)\|_2)^2\|u\|_{L_2}^2\end{aligned}$$

这说明该系统的 L_2 增益上界为 $\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\|G(\mathrm{j}\omega)\|_2$。

【12】考虑非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u)\\ y &= h(x,u)\end{aligned}$$

其中，$x(0)=x_0$，$f(0,0)=0$，$h(0,0)=0$，对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $u\in\mathbb{R}^m$，f 是局部 Lipschitz 的和 h 是连续的。令 $V(x)$ 是一个连续可微、半正定函数，使得对所有的 (x,u) 有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x,u) \le k(\gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2)$$

其中，k 和 γ 为正常数。证明：对于每个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，系统是有限增益 L_2 稳定的，且它的增益小于或者等于 γ。

证明： 对 $\dot{V}$ 所在不等式的两端在区间 $[0,\tau]$ 上积分，可得

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \le k\gamma^2 \int_0^\tau \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t - k\int_0^\tau \|y(t)\|^2 \mathrm{d}t$$

由于 $V(x(\tau)) \ge 0$，整理可得

$$\int_0^\tau \|y(t)\|^2 \mathrm{d}t \le \gamma^2 \int_0^\tau \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t + \frac{V(x(0))}{k}$$

再根据 L_2 范数的定义，有

$$\begin{aligned}\|y_\tau\|_{L_2}^2 &\le \gamma^2 \|u_\tau\|_{L_2}^2 + \frac{V(x(0))}{k} \\ &\le \gamma^2 \|u_\tau\|_{L_2}^2 + \frac{V(x(0))}{k} + 2\gamma \|u_\tau\|_{L_2} \sqrt{\frac{V(x(0))}{k}}\end{aligned}$$

两边开方可得

$$\|y_\tau\|_{L_2} \le \gamma \|u_\tau\|_{L_2} + \sqrt{\frac{V(x(0))}{k}}$$

由此可知，系统是有限增益 L_2 稳定的，L_2 增益上界为 γ。

4 非线性系统控制

【13】设某非线性系统模型如下

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

请设计状态反馈控制律 u，使得闭环系统是全局渐近稳定的。

解： 这是一个严反馈二阶系统，可用反步法分两步完成设计。

(1) 对于第 1 阶子系统 $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$，将 x_2 作为其控制输入，设计虚拟反馈控制 $x_2 = \phi(x_1)$ 来镇定这个系统的原点 $x_1 = 0$。选取第 1 阶子系统的候选 Lyapunov 函数 $V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$，对其关于时间 t 求导可得

$$\dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 = x_1^3 - x_1^4 + x_1\phi_1(x_1)$$

取 $\phi(x_1) = -x_1^2 - x_1$，并代入上式可得

$$\dot{V}_1 = -x_1^2 - x_1^4 < 0$$

由此可知第 1 阶子系统的原点 $x_1 = 0$ 被 $x_2 = \phi(x_1)$ 全局镇定。

(2) 对于第 2 阶子系统 $\dot{x}_2 = u$，需要设计真实控制律 u。为此，做变量替换

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2$$

即有 $x_2=z_2-x_1-x_1^2$，代入原系统方程，则有变换后的状态方程

$$\dot{x}_1=-x_1-x_1^3+z_2$$
$$\dot{z}_2=u+(1+2x_1)(-x_1-x_1^3+z_2)$$

取 $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}z_2^2$ 为整个系统的候选 Lyapunov 函数，对它求导可得

$$\dot{V}=x_1(-x_1-x_1^3+z_2)+z_2[u+(1+2x_1)(-x_1-x_1^3+z_2)]$$

$$=-x_1^2-x_1^4+z_2[x_1+(1+2x_1)(-x_1-x_1^3+z_2)+u]$$

设计反馈控制为

$$u=-x_1-(1+2x_1)(-x_1-x_1^3+z_2)-z_2$$

得出

$$\dot{V}=-x_1^2-x_1^4-z_2^2<0$$

闭环系统的原点全局渐近稳定。

【14】设某非线性系统模型如下

$$\dot{x}_1=x_1\sin x_1+x_2$$
$$\dot{x}_2=x_1+u$$

请设计状态反馈控制律 u，使得闭环系统是全局渐近稳定的。

解：这是一个严反馈二阶系统，可用反步法分两步完成设计。

(1) 对于第 1 阶子系统 $\dot{x}_1=x_1\sin x_1+x_2$，将 x_2 作为其控制输入，设计虚拟反馈控制 $x_2=\phi(x_1)$ 来镇定这个系统的原点 $x_1=0$。选取第 1 阶子系统的候选 Lyapunov 函数 $V_1(x_1)=\frac{1}{2}x_1^2$，对其关于时间 t 求导可得

$$\dot{V}_1=x_1\dot{x}_1=x_1^2\sin x_1+x_1\phi(x_1)$$

取 $\phi(x_1)=-x_1\sin x_1-x_1$，并代入上式可得

$$\dot{V}_1=-x_1^2<0$$

由此可知第 1 阶子系统的原点 $x_1=0$ 被 $x_2=\phi(x_1)$ 全局镇定。

(2) 对于第 2 阶子系统 $\dot{x}_2=x_1+u$，需要设计真实控制律 u。为此，做变量替换

$$z_2=x_2-\phi(x_1)=x_2+x_1\sin x_1+x_1$$

即有 $x_2=z_2-x_1\sin x_1-x_1$，代入原系统方程，则有变换后的状态方程

$$\dot{x}_1=-x_1+z_2$$
$$\dot{z}_2=x_1+u+(1+\sin x_1+x_1\cos x_1)(-x_1+z_2)$$

取 $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}z_2^2$ 为整个系统的候选 Lyapunov 函数，对它求导可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= x_1(-x_1+z_2)+z_2[x_1+u+(1+\sin x_1+x_1\cos x_1)(-x_1+z_2)] \\
&= -x_1^2+z_2[2x_1+(1+\sin x_1+x_1\cos x_1)(-x_1+z_2)+u]
\end{aligned}
$$

设计反馈控制为

$$u=-2x_1-(1+\sin x_1+x_1\cos x_1)(-x_1+z_2)-z_2$$

得出

$$\dot{V}=-x_1^2-z_2^2<0$$

闭环系统的原点全局渐近稳定。