实验二　连续时间系统的时域分析

江苏师范大学 • 电气工程及自动化学院 • 李灿

1　实验目的

1. 熟悉 MATLAB 中控制系统工具箱，掌握连续时间系统的 MATLAB 表示方法；
2. 掌握连续时间系统的各类时域响应的计算；
3. 掌握 MATLAB 求连续时间信号卷积的方法，验证卷积的相关性质；
4. 掌握连续时间系统在不同激励信号下的时域响应特征。

2　实验原理

要对系统进行分析，首先要将系统表示出来。已经学过，连续时间线性时不变系统的时域模型一般用一个线性常系数微分方程进行描述。在 MATLAB 中，常用控制系统工具箱中的 `tf()` 和 `ss()` 等函数来描述线性时不变系统。前者是系统的传递函数（系统函数）模型，定义为零初始条件下，输出信号 Laplace 变换和输入信号 Laplace 变换的比值，描述的是系统输入输出的关系；后者是状态空间模型，可以反应系统内部状态，可以将 n 阶微分方程转化为 n 维向量微分方程。两类模型可以通过 `tf2ss()` 和 `ss2tf()` 进行相互转换。模型表示出来之后，就可以调用控制系统工具箱中的 `lsim()` 和 `initial()` 函数，求解系统的零状态响应和零输入响应。对于特定的测试激励信号，如冲激信号和阶跃信号，它们对应的冲激响应和阶跃响应分别可以用 `impulse()` 和 `step()` 函数求解。

理论课中学过，任意连续时间信号 $f(t)$ 都可以表示为单位冲激信号在不同位置的加权和，而冲激信号通过线性时不变系统的影响为冲激响应 $h(t)$，导出系统的零状态响应等于激励信号和冲激响应的卷积，即

$$y_f(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

为了加深这一理解，可以将卷积计算的结果和直接采用 `lsim()` 求得的结果进行比较。需注意 MATLAB 中并未对连续时间信号的卷积进行直接定义，但是仍然可以借助离散序列的卷积和间接获得。只要获得了系统的冲激响应 $h(t)$，当激励信号 $f(t)$ 发生改变时，只需要用重新计算卷积 $f(t) * h(t)$，即可获得新的零状态响应。

在介绍系统完全响应求解时，先从回顾经典法开始的，即直接求解线性微分方程。因此，也可以利用此方法求出系统响应，并让其与线性时不变系统的分解法求得的完全响应进行对比分析。

3 程序讲解

3.1 连续时间系统模型的表示

连续时间 LTI 系统的微分方程描述为

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m f^{(m)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

令上式左边的系数构成向量 $a = [a_n, \cdots, a_1, a_0]$，右边的系数构成向量 $b = [b_m, \cdots, b_1, b_0]$，则可以利用它们确定系统模型，其调用格式为

```
sys = tf(b, a);
```

之后即可用返回值 `sys` 代替系统在求响应的功能函数中调用。事实上，`tf` 描述的就是传递函数模型，学完第七章就能更加清晰这一点。

例：已知某系统的动态方程为

$$y''(t) + 2y'(t) + 100y(t) = f(t)$$

用 MATLAB 表示该系统的程序为

```
a = [1 2 100];
b = 1;
sys = tf(b, a);
```

事实上，在零初始条件下对系统的微分方程两端同时进行 Laplace 变换，得到

$$(s^2 + 2s + 100)Y(s) = F(s)$$

从而得到传递函数（系统函数）

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 100}$$

故 $b = 1$，$a = [1 \quad 2 \quad 100]$，它们分别为分子多项式和分母多项式的系数向量。

需要注意，如果系统方程任何一边的某阶导数项空缺，则相应项的系数为 0，且不可省略。例如，系统动态方程改为

$$y'''(t) + 2y'(t) = f(t)$$

则系数向量应为

```
a = [1 0 2 0];
```

在控制系统工具箱中，还给出了另一函数 `ss()`，用来描述系统的状态空间模型，其参数是系统方程中的四个矩阵 A、B、C、D，实现程序为

```
sys = ss(A, B, C, D);
```

在未学习状态空间模型（参考《自动控制原理》教材）之前，四个矩阵参数该模型可由传递函数模型的 a 和 b 转换而来，调用格式为

```
[A, B, C, D] = tf2ss(b, a);
```

3.2 零输入响应

零输入响应指的是输入为零，系统对初始储能，即非零初始状态的响应。MATLAB 中，提供了 `initial()` 函数求之。调用格式为

```
yx = initial(sys, y0, t);
```

其中，`sys` 为状态空间模型描述的系统，`y0` 为初始状态向量，`t` 为时间。

例：已知系统的动态方程和初始条件为

$$y''(t) + 2y'(t) + 100y(t) = f(t)$$
$$y(0) = 0.1,\ y'(0) = 0.1$$

则求该系统零输入响应的程序为：

```
t = 0 : 0.01 : 10;
a = [1 2 100];
b = 1;
[A, B, C, D] = tf2ss(b, a);
sys = ss(A, B, C, D);
y0 = [0.1; 0.1];
yx = initial(sys, y0, t);
plot(t, yx, '-r', 'linewidth', 2)
```

3.3 零状态响应

零状态响应指的是初始状态为零，系统对输入信号的响应。MATLAB 中，提供了 `lsim()` 函数求之。调用格式为

```
yf = lsim(sys, f, t);
```

其中，`sys` 为传递函数模型描述的系统，`f` 为输入信号，`t` 为时间。

例：已知系统的动态方程和输入信号为

$$y''(t) + 2y'(t) + 100y(t) = f(t)$$
$$f(t) = 10\sin(10\pi t)$$

则求该系统零输入响应的程序为：

```
t = 0 : 0.01 : 10;
a = [1 2 100];
b = 1;
sys = tf(b, a);
f = 10 * sin(10*pi*t);
yf = lsim(sys, f, t);
plot(t, yf, '-r', 'linewidth', 2)
```

3.4 完全响应

根据连续时间 LTI 系统的线性特性，系统的完全响应等于它的零输入响应和零状态响应之和，即

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t)$$

因此，在前两节的基础上，相应的完全响应计算程序直接写为

```
y = yx + yf;
plot(t, y, '-r', 'linewidth', 2)
```

下面给出两种直接求系统完全响应的 MATLAB 方法。

3.4.1 lsim() 函数方法

上节用到的 `lsim()` 函数实际上还可以将初始状态向量 y0 作为参数传递，从而得到系统的完全响应，其调用格式为

```
y = lsim(sys, f, t, y0);
```

注意：当使用初始状态向量参数 y_0 时，系统必须要用状态空间模型 `ss()` 来描述，而不能使用传递函数模型 `tf()`。

例：已知系统的动态方程、输入信号和初始条件为

$$y''(t) + 2y'(t) + 100y(t) = f(t)$$
$$f(t) = 10\sin(10\pi t)$$
$$y(0) = 0.1,\ y'(0) = 0.1$$

则该求系统的零输入响应，零状态响应和完全响应，以及绘制响应图的完整程序为

```
t = 0 : 0.01 : 10;
a = [1 2 100];
b = 1;
sys = tf(b, a);
ft = 10 * sin(10*pi*t);
y0 = [0.1; 0.1];
yx = lsim(sys, 0*t, t, y0);
yf = lsim(sys, f, t);
y = lsim(sys, f, t, y0);
%% 绘图，并加以修饰
figure('position', [0, 0, 600, 400])
hold on
H1 = plot(t, yf, '-r', 'linewidth', 2);
H2 = plot(t, yx, ':b', 'linewidth', 2);
H3 = plot(t, y, '-g', 'linewidth', 2);
```

```
% 加图例，用legend
set(gca, 'fontsize', 13);
legend([H1; H2; H3], 'zero-state response', 'zero-input response',...
                     'complete response', 'location', 'northeast');
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
% 多图比较，坐标轴显示
figure('position', [0, 0, 600, 300])
subplot(3, 1, 1)
plot(t, yf, '-r', 'linewidth', 2)
ylabel('$y_f(t)$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'fontsize', 13);
legend('zero-state response', 'location', 'northeast');
subplot(3, 1, 2)
plot(t, yx, ':b', 'linewidth', 2)
ylabel('$y_x(t)$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'fontsize', 13);
legend('zero-input response', 'location', 'northeast');
subplot(3, 1, 3)
plot(t, y, '-g', 'linewidth', 2)
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
legend('complete response', 'location', 'northeast');
set(gca, 'fontsize', 13);
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
```

3.4.2 微分方程符号求解方法

在 MATLAB 符号求解微分方程时，可以利用 `diff()` 表示函数的各阶导数，然后表示写出微分方程表达式，最后利用 `dsolve()` 函数进行求解即可。作为扩展内容，直接参考如下程序

```
syms t y(t)
eqn = [ diff(y, t, 2) + 2*diff(y, t) + 100*y == 10*sin(10*pi*t) ];
Dy = diff(y, t);
cod = [ y(0) == 0.1, Dy(0) == 0.1];
y_sol(t) = dsolve(eqn, cod);
t = 0 : 0.01 : 10;
y = y_sol(t);
plot(t, y, '-r', 'linewidth', 2)
```

3.5 冲激响应与阶跃响应

在 MATLAB 中，直接提供了可以求线性 LTI 系统的冲激响应（也称脉冲响应）和阶跃响应的功能函数，分别为 `impulse()` 和 `step()`，其调用格式为

```
h = impulse(sys, t)
g = step(sys, t)
```

其中 `sys` 可以传递函数模型也可以是状态空间模型，时间 `t` 缺省时将自动选取。当采用传递函数模型时，调用格式也可以直接采用

```
h = impulse(b, a, t)
g = step(b, a, t)
```

例：已知某系统的动态方程：

$$y''(t) + 2y'(t) + 100y(t) = 10f(t)$$

求该系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$，并在同一图中绘制两条响应曲线的程序为

```
t = 0 : 0.01 : 20;
a = [1 2 100];
b = 10;
sys = tf(b, a);
h = impulse(sys, t);
g = step(sys, t);
figure('position', [0, 0, 600, 300])
hold on
H1 = plot(t, h, ':b', 'linewidth', 2);
H2 = plot(t, g, '-r', 'linewidth', 2);
set(gca, 'fontsize', 13);
legend([H1; H2], 'impulse response', 'step response',...
                 'location', 'northeast');
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
```

3.6 卷积积分

根据连续时间信号的卷积定义，可得

$$y_f(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \cdot h(t-k\Delta) \cdot \Delta$$

令 $t = n\Delta$，则

$$y_f[k\Delta] = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k\Delta] \cdot h[(n-k)\Delta] \cdot \Delta = f(k\Delta) * h(k\Delta) \cdot \Delta$$

上式蓝色部分就是连续时间信号离散化之后的卷积和公式，程序可以写为

```
yf = conv(f, h) * Delta
```

MATLAB 中虽然没有提供对连续时间信号的卷积函数，但提供了求离散信号卷积和的 `conv()` 函数。不妨由此自定义卷积函数

```
function [yf, t] = conv_c(f, h, t1, t2, stepsize)
    yf = conv(f, h) * stepsize;
    t_s = t1(1) + t2(1);
    t_e = t1(end) + t2(end);
    t = linspace(t_s, t_e, length(yf));
end
```

接下来就可以直接调用 `conv_c()` 函数计算连续时间信号的卷积了。

例：已知某系统的激励信号和冲激响应分别为

$$f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$
$$h(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-1)$$

则该系统的零输入响应为

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

求解程序为

```
Delta = 0.01;
t1 = -2 : Delta : 4;
t2 = -2 : Delta : 4;
ft = rectpuls(t1, 2);
ht = rectpuls(t2-0.5, 1) .* tripuls(t2-1, 2);
[t, yf] = conv_c(ft, ht, t1, t2, Delta); % 调用自定义卷积函数
%% 绘图，卷积前后比较（三图合一）
figure('position', [0, 0, 600, 400])
hold on
H1 = plot(t1, ft, '--r', 'linewidth', 2);
H2 = plot(t2, ht, ':b', 'linewidth', 2);
H3 = plot(t, yf, '-g', 'linewidth', 2);
set(gca, 'fontsize', 13);
legend([H1; H2; H3], 'input signal', 'impulse response',...
                     'zero-state response', 'location', 'northeast');
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
axis([-2 4 -.5 1.5])
%% 绘图，卷积前后比较（三子图）
figure('position', [0, 0, 600, 400])
subplot(3, 1, 1)
```

```
plot(t1, ft, '-r', 'linewidth', 2)
set(gca, 'fontsize', 13);
legend('input signal', 'location', 'northeast');
ylabel('$f(t)$', 'interpreter', 'latex')
subplot(3, 1, 2)
plot(t2, ht, '-b', 'linewidth', 2)
set(gca, 'fontsize', 13);
legend('impulse response', 'location', 'northeast');
ylabel('$h(t)$', 'interpreter', 'latex')
subplot(3, 1, 3)
plot(t, yf, '-g', 'linewidth', 2)
legend('zero-state response', 'location', 'northeast');
set(gca, 'fontsize', 13);
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
axis([-2 4 0 1])
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
```

3.7 仿真工具箱

利用 MATLAB 的 simulink 工具箱，可以进行模块化系统分析。作为扩展内容讲解，了解常见模块、系统搭建和基础仿真。

4 实验内容

1. 已知描述某连续时间 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$
$$f(t) = u(t) - u(t-1)$$

   (1) 分别用 `initial()` 函数和 `lsim()` 函数求该系统的零输入响应，绘制响应曲线；
   (2) 求该系统的零状态响应和完全响应，绘制响应曲线。
2. 以下三个微分方程分别描述一阶、二阶、三阶 BW 型模拟低通滤波器，请分别求出它们的冲激响应和阶跃响应，并且绘制响应曲线，比较它们的时域特性。
   (1) $y'(t) + y(t) = f(t)$
   (2) $y''(t) + \sqrt{2}y'(t) + y(t) = f(t)$
   (3) $y'''(t) + 2y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t)$
3. 在第 2 题获得的冲激响应基础上，利用卷积法分别计算三个滤波器在 $f(t) = u(t) - u(t-1)$ 时的零状态响应。
4. * 利用 conv() 编写连续时间信号的卷积函数 `conv_c()`，并由此验证卷积的交换律、分配律和结合律（可以任意自选 3 个信号）。

5. 利用 Simulink 工具箱搭建一个简单的连续时间 LTI 系统，设置激励信号，观察系统响应。

5 实验报告

1. 简述实验目的和实验原理。
2. 完成实验内容部分的第 1–3、5 题，要求独自完成程序编写和绘图，写入报告。
3. 选做实验内容部分第 4 题，完成的内容也写入报告。
4. 总结实验过程，记录心得体会。

参考文献

[1] 陈后金, 胡健, 薛健. 信号与系统 (第三版). 北京: 清华大学出版社, 2017.

[2] 龚晶, 许凤慧, 卢娟, 等. 信号与系统实验. 北京: 机械工业出版社, 2022.

[3] 徐亚宁, 唐璐丹, 王旬, 等. 信号与系统分析实验指导书 (MATLAB 版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.