

目录

1 实验目的	2
2 实验原理	2
3 程序讲解	3
3.1 RC 电路系统的零状态响应	3
3.2 低通滤波器的频率响应	4
3.3 低通滤波器的冲激响应和阶跃响应	5
3.3.1 冲激响应	5
3.3.2 阶跃响应	6
4 实验内容	6
5 实验报告	7

实验五 连续时间系统的频域分析

江苏师范大学 · 电气工程及自动化学院 · 李灿

1 实验目的

1. 掌握连续系统的频域表示；
2. 掌握通过频率响应求解时域响应的方法；
3. 掌握系统幅频曲线的绘制；
4. 熟悉滤波器的特征及应用。

2 实验原理

在理论课中重点讲过，虚指数信号 $f(t) = e^{j\omega t}$ 通过连续时间 LTI 系统后，输出信号仍然为同频率（均为 ω ）的虚指数信号，只是在幅度和相位上有所不同，即

$$y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega) \quad (1)$$

其中 $H(j\omega)$ 就是该系统的频率响应，可进一步将其写为幅度响应与相位响应的形式

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (2)$$

因为对信号进行 Fourier 变换后，可以到信号由无穷多虚指数信号的线性组合，利用 LTI 系统的线性特性，即可将上述虚指数信号 $f(t) = e^{j\omega t}$ 推广到任意存在 Fourier 变换的信号 $f(t)$ 。换言之，只要令 $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$ 和 $\mathcal{F}[y(t)] = Y(j\omega)$ ，则必然有

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \quad (3)$$

而频率响应可以表示为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \quad (4)$$

其含义为输出信号 Fourier 变换与输入信号 Fourier 变换的比值，很好地描述了 LTI 系统输入与输出之间的关系，是连续时间 LTI 系统的频域模型。将 $Y(j\omega) = |Y(j\omega)|e^{j\varphi_y(\omega)}$ 和 $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi_f(\omega)}$ 代入式(4)，并对式(2)有

$$|H(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_y(\omega) - \varphi_f(\omega) \quad (5)$$

因此，幅度响应也称为输出与输入的幅值比（幅频特性），相位响应也称为输出与输入的相位差（相频特性）。绘制系统的频率响应图，可以分析系统的特性。在 MATLAB 中，可以利用 `freqs()` 函数求系统的频率响应。对于一些特殊的信号，如正弦信号，则可以直接利用公式编写程序实现。

由 Fourier 变换的卷积特性，从时域下来看，式(3)等价于

$$y(t) = f(t) * h(t) \quad (6)$$

因此，对于微分方程描述的 LTI 系统，通过 Fourier 变换和 Fourier 变换的时域微分特性，可以很方便地变换为代数方程求解。最后对 $H(j\omega)$ 作 Fourier 反变换，可得到冲激响应 $h(t)$ ；对 $Y(j\omega)$ 作 Fourier 反变换，可得到零状态响应 $y(t)$ 。这可以结合上个实验中的 Fourier 反变换函数 `ifourier()` 来实现。

信号的频谱实践上描述了该信号由不同频率分量组成的情况。滤波器对输入信号的特定频率分量起到过滤作用，使输出信号相对于输入信号发生失真（形变），注意这种过滤作用在很多情况下是积极的，比如过滤特定频率的噪声信号、抽样信号的重建等。在 MATLAB 中，可以用典型的测试信号，如单位冲激信号、阶跃信号等，去求解和分析滤波器的频率响应情况。

3 程序讲解

3.1 RC 电路系统的零状态响应

例：已知某 RC 串联电路的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} \quad (7)$$

求该电路在信号

$$f(t) = \cos(5t) + \cos(100t) \quad (8)$$

激励输入下的响应。（取 $RC = 0.04$ ）

注意到余弦信号 $\cos(\omega_0 t)$ 通过 LTI 系统的响应为

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (9)$$

那么只需要利用幅度响应函数和相位响应函数结合该关系即可求得，其中包括的频率为 $\omega_1 = 5$ 和 $\omega_2 = 100$ ，即要求系统对 ω_1 和 ω_2 这两个频率分量的响应之和。程序如下

```
% 计算零状态响应
RC = 0.04;
t = linspace(-2, 2, 1024);
w1 = 5;
w2 = 100;
H1 = 1/RC / ( 1/RC + i*w1 );
H2 = 1/RC / ( 1/RC + i*w2 );
ft = cos(5*t) + cos(100*t);
yt = abs(H1) * cos(w1*t + angle(H1)) + abs(H2) * cos(w2*t + angle(H2));
% 绘图
figure('position', [0, 0, 1000, 600])
subplot(2, 1, 1)
```

```

plot(t, ft, '-r', 'linewidth', 2)
set(gca, 'fontsize', 13);
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$f(t)$', 'interpreter', 'latex')
axis([-2 2 -2 2])
subplot(2, 1, 2)
plot(t, yt, '-b', 'linewidth', 2)
set(gca, 'fontsize', 13);
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
axis([-2 2 -2 2])

```

扩展：请用不同频率的激励信号输入到该电路系统，观察系统响应，判断该系统是何种类型的滤波器。

3.2 低通滤波器的频率响应

首先将频率响应用函数表达式（有理真分式）进行表示，再分别求频率响应得幅度响应和相位响应，在 MATLAB 中，可以用 `freqs()` 函数实现，调用格式为

```
freqs(b, a, w)
```

其中 `b` 为分母多项式系数向量，`a` 为分子多项式系数向量，`w` 为选取的频率范围。幅度响应用 `abs()` 函数，相位响应用 `angle()`。

例：已知三阶 Butterworth 低通滤波器的频率响应函数为

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1} \quad (10)$$

绘制其频率响应图。

```

w = linspace(0, 5, 200);
b = 1;
a = [1 2 2 1];
Hw = freqs(b, a, w);
% 绘图
figure('position', [0, 0, 1000, 600])
subplot(2, 1, 1)
plot(w, abs(Hw), '-r', 'linewidth', 3)
set(gca, 'fontsize', 13);
xlabel('$\omega$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$|H(\mathrm{j}\omega)|$', 'interpreter', 'latex')
subplot(2, 1, 2)
plot(w, angle(Hw), '-b', 'linewidth', 3)

```

```

set(gca, 'fontsize', 13);
xlabel('\$\omega$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('\$\varphi(\omega)$', 'interpreter', 'latex')

```

思考：与3.1节中最简单的 RC 低通滤波器相比，三阶 Butterworth 低通滤波器从幅度响应特性上看，有何优点？

3.3 低通滤波器的冲激响应和阶跃响应

仍取3.1节中的 RC 电路作为低通滤波器模型，并令 $RC = 1$ ，则频域响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \quad (11)$$

在接下来求冲激响应和阶跃响应的程序中，同时还体现了利用频率响应和频域分析求系统时域响应的方法。

3.3.1 冲激响应

当 $f(t) = \delta(t)$ 输入到低通滤波器后的响应。在 MATLAB 中，可以使用 `dirac()` 函数表示单位冲激信号。求冲激响应的程序如下

```

syms t w
ft = dirac(t);
Fw = fourier(ft);
Hw = 1 / ( 1 + j*w )
Yw = Fw * Hw
y1t = ifourier(Yw)
subplot(211)
H1 = fplot(y1t, [0, 20]);
set(gca, 'fontsize', 13);
set(H1, 'color', 'red', 'linewidth', 1.5);
ylabel('\$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
title('Frequency-domain Method')
axis([0 20 0 1])
t = 0 : 0.01 : 20;
b = 1; a = [1 1];
y2t = impulse(b, a, t);
subplot(212)
H2 = plot(t, y2t);
set(gca, 'fontsize', 13);
set(H2, 'color', 'blue', 'linewidth', 1.5);
xlabel('\$t$', 'interpreter', 'latex');
ylabel('\$y(t)$', 'interpreter', 'latex')

```

```

title('Time-domain Method')
axis([0 20 0 1])

```

程序中，第 2 个图直接利用时域分析中的冲激响应函数 `impulse()` 作为对比。

3.3.2 阶跃响应

当 $f(t) = u(t)$ 输入到低通滤波器后的响应。在 MATLAB 中，可以使用 `heaviside()` 函数表示单位阶跃信号。求阶跃响应的程序如下

```

syms t w
ft = heaviside(t);
Fw = fourier(ft);
Hw = 1 / ( 1 + j*w );
Yw = Fw * Hw
y1t = ifourier(Yw)
subplot(211)
H1 = fplot(y1t, [0, 20]);
set(gca, 'fontsize', 13);
set(H1, 'color', 'red', 'linewidth', 1.5);
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
title('Frequency-domain Method')
axis([0 20 0 1])
t = 0 : 0.01 : 20;
b = 1; a = [1 1];
y2t = step(b, a, t);
subplot(212)
H2 = plot(t, y2t);
set(gca, 'fontsize', 13);
set(H2, 'color', 'blue', 'linewidth', 1.5);
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex');
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
title('Time-domain Method')
axis([0 20 0 1])

```

程序中，第 2 个图直接利用时域分析中的阶跃响应函数 `step()` 作为对比。

4 实验内容

1. 已知某 RC 串联电路的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega}$$

- (1) 取两组不同的 RC 值, 用 `freqs()` 函数画出系统幅度响应 $H(j\omega)$ 的图形;
 - (2) 信号 $f(t) = \cos(100t) + \cos(3000t)$ 包含一个低频分量和一个高频分量, 请选取适当的 RC 值, 滤除信号 $f(t)$ 中的高频分量, 并画出滤波后信号 $y(t)$ 和原信号 $f(t)$ 的波形。
2. 已知三阶 Butterworth 低通滤波器的频率响应函数为

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$$

- (1) 分别用频域和时域方法求它的冲激响应;
 - (2) 分别用频域和时域方法求它的阶跃响应。
3. 已知某微分方程描述的连续时间 LTI 系统为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f'(t) + 4f(t)$$

- (1) 绘制该系统的频率响应图 (包括幅度响应和相位响应);
- (2) * 利用频率响应方法, 求 $f(t) = e^{-t}u(t)$ 时的零状态响应。
(提示: 先求 $Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$, 再利用 Fourier 反变换。)

5 实验报告

1. 简述实验目的和实验原理。
2. 完成实验内容部分的第 1、2、3-(1) 题, 要求独立完成程序编写和绘图, 写入报告。
3. 选做实验内容部分第 3-(2) 题, 完成的内容也写入报告。
4. 总结实验过程, 记录心得体会。

参考文献

- [1] 陈后金, 胡健, 薛健. 信号与系统 (第三版). 北京: 清华大学出版社, 2017.
- [2] 龚晶, 许凤慧, 卢娟, 等. 信号与系统实验. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [3] 徐亚宁, 唐璐丹, 王旬, 等. 信号与系统分析实验指导书 (MATLAB 版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.