目录

实验六　连续时间信号和系统的复频域分析

江苏师范大学 · 电气工程及自动化学院 · 李灿

1　实验目的

1. 掌握 Laplace 变换的计算方法和性质；
2. 掌握 Laplace 反变换的实现方法；
3. 掌握连续时间系统的系统函数表示；
4. 掌握系统函数的零极点与系统特性。

2　实验原理

2.1　信号的 Laplace 变换

前面学习过, 对信号和系统进行频域分析时, 要求信号或者系统冲激响应的 Fourier 变换是存在的，为此通常需要假设系统本身稳定。然而，以指数增长信号为例的一些信号并不存在 Fourier 变换。通过对信号 $f(t)$ 乘以某个指数衰减函数 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$，$\sigma > 0$，如果 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的 Fourier 变换存在，则将该 Fourier 变换结果定义为 $f(t)$ 的 Laplace 变换，而该 Fourier 变换存在的条件（即 σ 取值范围）则是 Laplace 变换的收敛域。双边 Laplace 变换的的定义式为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中 $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$。以 σ 为坐标，$\mathrm{j}\omega$ 为纵坐标，即可得到一个复平面（也成为 S 平面）。由上可知，一些不存在 Fourier 变换的信号存在 Laplace 变换，因此可以将 Laplace 变换看作是 Fourier 变换的推广形式。信号和系统的分析也由频域（对应复平面中的虚轴）推广到了复频域。如果将式(1)中的积分下限由 $-\infty$ 改为 0^-，则得到单边 Laplace 变换。对于因果信号，其双边 Laplace 变换和单边 Laplace 变换相同。$f(t)$ 的 Laplace 反变换也是通过求 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 的 Fourier 反变换得到的，具体形式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{2}$$

这是一个复变积分，直接计算存在一定的难度。在 MATLAB 中，给出了求 Laplace 变换对的功能函数 `laplace()` 和 `ilaplace()`。

对于可以表示为有理分式（两个多项式之商）信号 Laplace 变换 $F(s)$，可以利用部分分式展开定理求 Laplace 反变换，MATLAB 中提供了 `residue()` 函数实现部分分式展开。

2.2 系统的复频域分析

类似频域分析，复指数信号 $f(t) = \mathrm{e}^{st}$ 通过连续时间 LTI 系统后，输出信号仍然为同复频率的复指数信号，只是在幅度和相位上有所不同，即

$$y(t) = \mathrm{e}^{st}H(s) \tag{3}$$

其中 $H(s)$ 就是该系统的系统函数（自动控制原理中称为传递函数）。对于任意信号 $f(t)$，只要令 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 和 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$，则必然有

$$Y(s) = F(s)H(s) \tag{4}$$

而系统函数可以表示为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} \tag{5}$$

其含义为输出信号（零状态响应）Laplace 变换与输入信号 Laplace 变换的比值，很好地描述了 LTI 系统输入与输出之间的关系，是连续时间 LTI 系统的复频域模型。作为时域下表征系统特性的冲激响应 $h(t)$，$H(s)$ 就是它的 Laplace 变换。

在求解系统响应时，可以 Laplace 变换的时域微分特性，先对微分方程两端同时进行 Laplace 变换，变为代数方程

$$Y(s) = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)}F(s) := Y_x(s) + Y_f(s) \tag{6}$$

$$H(s) = \frac{Y_f(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{7}$$

再将获得的 $H(s)$ 和 $Y(s)$ 表达式分别进行 Laplace 反变换，即可获得冲激响应和完全响应（如果初始状态为零，则获得零状态响应）。特别地，当系统稳定时，可以直接令 $s = \mathrm{j}\omega$，即可获得系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$，其在 MATLAB 中的求解和分析可以借助实验五中的 `freqs()` 函数。

在时域中，系统稳定的条件是其冲激响应 $h(t)$ 绝对可积；在频域中是以假设稳定为前提的，而在复频域中无此假设；那么，在复频域中如何判断系统的稳定性呢？这就要分析系统函数 $H(s)$ 的极点分布了。将系统的传递函数模型转换成如下零极点增益模型

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{8}$$

其中，$z_1, z_2, \ldots, z_m$ 为传递函数的零点，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ 为传递函数的极点，K 为系统的增益。将零极点绘制在复平面图中，如果所有极点都分布在左半复平面，则系统是稳定的。在 MATLAB 中，提供了 `tf2zp()` 函数求零极点增益模型参数，提供了 `pzmap()` 函数求零极点分布实现绘图。也可以利用多项式求根函数 `root()`，求出分母多项式的根即得到极点，求出分子多项式的根即得到零点。

3 程序讲解

3.1 求信号的 Laplace 正反变换

在 MATLAB 中，求 Laplace 变换的 `laplace()` 函数和 Laplace 反变换的 `ilaplace()` 函数都是符号运算函数，下面举例展示其用法。

例： 求时域信号 $f_1(t)$ 的 Laplace 变换 $F_1(s)$

$$f_1(t) = \cos(t)u(t) \tag{9}$$

程序为

```
syms t s
ft1 = cos(t) * heaviside(t);
Fs1 = laplace(ft1)
```

例： 求复频域信号 $F_2(s)$ 的 Laplace 反变换 $f_2(t)$

$$F_2(s) = \frac{1}{s+1}F_1(s) + s^2 \tag{10}$$

其中 $F_1(s)$ 是上一个例子的计算结果。

程序为

```
syms t s
ft_1 = cos(t) * heaviside(t);
Fs_1 = laplace(ft_1)
Fs_2 = Fs_1 * (1/(s+1)) + s^2;
ft_2 = ilaplace(Fs_2)
```

3.2 部分分式展开法求 Laplace 反变换

在 MATLAB 中，可以用 `residue()` 函数对有理分式进行部分分式展开，调用格式为

```
[r, p, k] = residue(num, den)
```

其中，参数 `num` 为分子多项式系数向量，`den` 为分子多项式系数向量，返回值 `r` 为极点的系数，`p` 为极点，`k` 为假分式化为真分式分离出来的 s 整数幂次项，系数按高次到低次幂的顺序排列。如果遇到多项式乘法，可以先利用 `conv()` 进行多项式展开。

例： 求 $F(s)$ 的 Laplace 反变换，其中

$$F(s) = \frac{2s^4 + 3s^3 + 5s}{(s+1)(s^2 - s - 2)} \tag{11}$$

先求部分分式展开的程序为

```
num = [2 3 0 5 0];
den = conv([1 1], [1 -1 -2]);
[r, p, k] = residue(num, den)
```

返回参数为

```
r = 7.3333
   -1.3333
    2.0000
```

```
p = 2.0000
   -1.0000
   -1.0000
k = 2   3
```

这表示部分分式展开后 s 的 1 次项系数为 2，常数项为 3，极点 2 的系数为 22/3，极点 -1（二重）的系数为 $-4/3$ 和 2。写出该展开式以及 Laplace 反变换的完整程序为

```
num = [2 3 0 5 0];
den = conv([1 1], [1 -1 -2]);
[r, p, k] = residue(num, den);
syms s t
Fs = r(1)/(s-p(1)) + r(2)/(s-p(2)) + r(3)/(s-p(3))^2 + k(1)*s + k(2)
ft = r(1)*exp(p(1)*t) + r(2)*exp(p(2)*t) + r(3)*t*exp(p(2)*t) +...
     k(1)*diff(dirac(t),t) + k(2)*dirac(t)
```

注： 可以在实时脚本中运行程序，可以显示公式表达式。

还可以利用 `ilaplace()` 函数验证上述结果，程序为

```
Fs = ( 2*s^4 + 3*s^3 + 5*s ) / ( (s + 1) * (s^2 - s - 2) )
ilaplace(Fs)
```

3.3 复频域方法求解系统响应

利用公式(6)–(7)及其原理进行计算。

例： 已知某因果连续时间 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4f'(t) + 3f(t), \quad t \geqslant 0 \tag{12}$$

$$y(0^-) = -2, \quad y'(0^-) = -3, \quad f(t) = u(t) \tag{13}$$

利用 Laplace 变换的时域微分特性，先对微分方程两端同时作 Laplace 变换，得

$$[s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = 4sF(s) + 3F(s) \tag{14}$$

整理为

$$Y(s) = \underbrace{\frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 3y(0^-)}{s^2 + 3s + 2}}_{Y_x(s)} + \underbrace{\frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} \cdot F(s)}_{Y_f(s)} \tag{15}$$

而输入信号 $f(t)$ 的 Laplace 变换为 $F(s) = 1/s$。后续计算程序如下

```
y0 = -2; dy0 = 3;
syms s
Fs = 1 / s;
Yxs = ( s*y0 + dy0 + 3*y0 ) / ( s^2 + 3*s + 2 )
Yfs = ( 4*s + 3 ) / ( s^2 + 3*s + 2 ) * Fs
```

```
Ys = Yxs + Yfs
% 零输入响应
yxt = ilaplace(Yxs)
% 零状态响应
yft = ilaplace(Yfs)
% 完全响应：也可以利用yt = yxt + yft
yt = ilaplace(Ys)
```

注：利用实验二中的时域分析方法求解上述系统响应，并进行对比验证。

3.4 系统函数的零极点分析

例：已知某系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{s-1}{s^3+2s^2+2s+1} \tag{16}$$

绘制其零极点分布图，分析稳定性。

利用 root() 函数实现的程序为

```
num = [1 -1];
den = [1 2 2 1];
sys = tf(num, den);
ps = roots(den) % poles
zs = roots(num) % zeros
figure(1)
H1 = plot(real(ps), imag(ps), 'rx', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
hold on
H2 = plot(real(zs), imag(zs), 'bo', 'MarkerSize', 8, 'LineWidth', 2);
grid on
axis([-2 2 -2 2])
xlabel('Real Axis', 'FontSize', 12)
ylabel('Imag Axis', 'FontSize', 12)
title('By the roots() method', 'FontSize', 12)
legend([H1; H2], 'Poles', 'Zeros', 'FontSize', 12)
```

注：在复平面上绘制零极点时，需要用到求复数点实部的 real() 函数和虚部的 image() 函数。

利用 pzmap() 函数实现的程序为

```
figure(2)
H3 = pzplot(sys, 'b')
H3.AxesGrid.XUnits = ''; % 去掉默认的单位“每秒”
H3.AxesGrid.YUnits = '';
H3 = findobj(gca, 'type', 'line')
set(H3, 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2)
```

```
axis([-2 2 -2 2])
xlabel('Real Axis', 'FontSize', 12)
ylabel('Imag Axis', 'FontSize', 12)
```

从图中可以看到所有极点都在复平面的左半平面，故判定 LTI 系统是稳定的。

另外，直接从 `[p, z] = pzmap(sys)` 的返回值也能得到方法一中 `ps = roots(den)` 和 `zs = roots(num)` 求得得结果：极点为 -1、-0.5 ± 0.866，唯一零点为 1。

接下来，分别绘制该系统的冲激响应和频率响应曲线验证稳定性。

```
num = [1 -1];
den = [1 2 2 1];
sys = tf(num, den);

t = 0 : .02 : 20;
w = 0 : .02 : 15;
ht = impulse(sys, t);
Hw = freqs(num, den, w);

figure(1)
plot(t, ht, 'r', 'LineWidth', 2)
xlabel('时间 (s)')
title('冲激响应')

figure(2)
plot(w, abs(Hw), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('频率 (rad/s)')
title('幅度响应')
```

4 实验内容

1. 用 MATLAB 求时域信号 $f_1(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t)$ 的 Laplace 变换 $F_1(s)$，并求 $F_2(s) = 1/(s^2+3s+2)$ 的 Laplace 反变换 $f_2(t)$。
2. 教材 262 页第 M7-1 题的第 (1)、(3) 小题：求以下两个 $F(s)$ 的部分分式展开式，并写出 $f(t)$ 的表达式。

$$F(s) = \frac{41.6667}{s^3 + 3.7444s^2 + 25.7604s + 41.6667}$$

$$F(s) = \frac{s^3}{(s+5)(s^2+5s+25)}$$

3. 教材 263 页第 M7-5 题：已知某因果连续时间 LTI 系统的系统函数

$$H(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+2s+1}$$

(1) 画出该系统的零极点分布图，并根据分布情况判断系统的稳定性；

(2) 求该系统的冲激响应、阶跃响应和频率响应，验证得到的稳定性结论。

4. * 已知某连续时间因果 LTI 系统的微分方程描述为

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 2f'(t) + 5f(t), \quad t \geqslant 0$$
$$f(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t), \ \ y(0^-) = 2, \ \ y'(0^-) = 5$$

试采用复频域分析方法求该系统的系统函数、零状态响应、零输入响应和完全响应。

5 实验报告

1. 简述实验目的和实验原理。
2. 完成实验内容部分的第 1–3 题，要求独自完成程序编写和绘图，写入报告。
3. 选做实验内容部分第 4 题，完成的内容也写入报告。
4. 总结实验过程，记录心得体会。

参考文献

[1] 陈后金, 胡健, 薛健. 信号与系统 (第三版). 北京: 清华大学出版社, 2017.

[2] 龚晶, 许凤慧, 卢娟, 等. 信号与系统实验. 北京: 机械工业出版社, 2022.

[3] 徐亚宁, 唐璐丹, 王旬, 等. 信号与系统分析实验指导书 (MATLAB 版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.