目录

实验七　离散时间系统的 Z 域分析

江苏师范大学 · 电气工程及自动化学院 · 李灿

1　实验目的

1. 掌握离散信号求 Z 变换和 Z 反变换的方法；
2. 掌握离散时间系统的系统函数表示；
3. 掌握系统函数零极点分布与系统时域特性的关系。

2　实验原理

2.1　信号的 Z 变换

离散时间信号的 Z 变换与连续时间信号的 Laplace 变换十分类似。当信号的 Fourier 变换（包括连续和离散）不存在时，无法从时域变换到频域，此时可以采用 Laplace 变换（连续）和 Z 变换（离散）的方法。实验四讲过，离散时间的 Fourier 变换（DTFT）定义为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k},\quad -\infty<\Omega<\infty \tag{1}$$

有些信号，比如 $f[k]=2^k u[k]$，其 DTFT 显然是不存在的。类似于 Laplace 变换的思想，对 $f[k]$ 乘以一个衰减的指数序列 r^{-k}，当 $r>2$ 时，$f[k]r^{-k}=2^k r^{-k}u[k]$ 也变成了指数衰减序列，满足绝对可和，其 DTFT 是存在的。对 $f[k]r^{-k}$ 进行 DTFT，得

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}\{f[k]r^{-k}\}&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}=\sum_{k=0}^{\infty}2^k r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(2r^{-1})^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}=\sum_{k=0}^{\infty}(2r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^k\\&=\frac{1}{1-2r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}},\quad r>2\end{aligned} \tag{2}$$

定义复频率 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$，其中 $|z|=r$，则式(2)可以改写为复变量（Z 域）的形式

$$\mathrm{DTFT}\{f[k]r^{-k}\}=\frac{1}{1-2z^{-1}},\quad |z|>2 \tag{3}$$

对于一般的离散序列 $f[k]$，乘以指数衰减因子之后

$$\mathrm{DTFT}\{f[k]r^{-k}\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}=\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]z^{-k}:=F(z)} \tag{4}$$

这就是 Z 变换的定义式，其收敛域就是能使 $F(z)$ 存在时 $|z|$ 的范围。离散序列的单边 Z 变换定义为

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k} \tag{5}$$

常用因果序列的 Z 变换可以参考教材第 267 页的表 8-1。在 MATLAB 中，提供了求 Z 变换的函数 `ztrans()`，而 `iztrans()` 则可以用来求 Z 反变换。

类似于求 Laplace 反变换，对于可以表示为有理分式（两个多项式之商）Z 变换 $F(z)$，可以利用部分分式展开定理求 Z 反变换，MATLAB 中提供了 `residuez()` 函数实现部分分式展开。

2.2 系统的 Z 域分析

类似连续时间信号的复频域分析，复指数序列 $f[k]=z^k$ 通过离散时间 LTI 系统后，输出信号为

$$y[k]=z^k * h(k)=\sum_n z^{k-n} h[n]=z^k \sum_n h[n] z^{-n}=z^k H(z) \tag{6}$$

其中 $H(z)$ 就是该离散时间系统的系统函数。对于任意序列 $f[k]$，在零初始条件下，只要令 $\mathcal{Z}[f[k]]=F(z)$ 和 $\mathcal{Z}[y[k]]=Y(z)$，则必然有

$$Y(z)=F(z)H(z) \tag{7}$$

而系统函数可以表示为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)} \tag{8}$$

其含义为输出序列（零状态响应）Z 变换与输入序列 Z 变换的比值，很好地描述了离散时间 LTI 系统输入与输出之间的关系，是离散时间 LTI 系统的复频域模型。作为时域下表征系统特性的单位脉冲响应 $h[k]$，$H(z)$ 就是它的 Z 变换。由实验三可知，离散时间 LTI 系统通常是由线性常系数差分方程进行描述，其两端进行 Z 变换即可获得 Z 域下的代数方程描述，且由此得到的系统函数为有理分式，即

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} \tag{9}$$

需要注意的是，求系统的单位脉冲响应 $h[k]$ 时，需要对式(9)进行部分分式展开，然后利用常见序列的 Z 变换表求 Z 反变换，例如

$$\mathcal{Z}[a^k u[k]]=\frac{1}{1-a z^{-1}} \tag{10}$$

此时对应单极点 $z=a$。由式(10)可以看到，指数序列 $a^k u[k]$ 衰减的条件是 $|a|<1$，这也意味着极点 $z=a$ 应该位于 Z 平面的单位圆内。这里的 Z 平面是关于复频率 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$，也是一个复平面，横坐标为 $\mathrm{Re}(z)$，纵坐标为 $\mathrm{Im}(z)$。

在时域中，离散时间系统稳定的条件是其单位脉冲响应 $h[k]$ 绝对可和，那么，在 Z 域中如何判断系统的稳定性呢？这就要分析系统函数 $H[z]$ 的极点分布了，而且上面举的例子可以推广到

一般情形，即只要 $H(z)$ 的所有极点都分布在 Z 平面的单位圆内，则有 Z 反变换后 $h[z]$ 指数收敛，从而得到离散时间系统是稳定的。将系统函数模型转换成如下零极点增益模型

$$H(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \tag{11}$$

其中，$z_1, z_2, \ldots, z_m$ 为传递函数的零点，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ 为传递函数的极点，K 为系统的增益。在 MATLAB 中，提供了 `tf2zp()` 函数（与连续时间系统的 S 域是同一个）求零极点增益模型参数，也可以利用多项式求根函数 `roots()`，求出分母多项式的根即得到极点，求出分子多项式的根即得到零点。而求零极点分布并实现绘图也可以直接利用 `zplane()` 函数。

注：离散时间系统的 Z 域分析（基于 Z 变换）与连续时间系统的 S 域分析（基于 Laplace 变换）有很多相似之处，可以“求同存异”的方式学习。

3　程序讲解

3.1　求信号的 Z 正反变换

在 MATLAB 中，求 Z 变换的 `ztrans()` 函数和 Z 反变换的 `iztrans()` 函数都是符号运算函数，下面举例展示其用法。

例：求离散序列 $f_1[k]$ 的 Z 变换 $F_1(z)$

$$f_1[k] = a^k u[k] \tag{12}$$

程序为

```
syms k
a = 2;
fk1 = a^k
Fz1 = ztrans(fk1)
```

运行结果：

$$\boxed{F_1(z) = \frac{z}{z-2}} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

注意：`ztrans()` 定义的就是单边 Z 变换，所以程序中不用体现 $f_1[k]$ 中的 $u[k]$。

例：求复频域信号 $F_2(z)$ 的 Z 反变换 $f_2[k]$

$$F_2(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2} \tag{13}$$

程序为

```
syms k z
a = 2;
Fz2 = 1 / (1 - a*z^(-1) )^2
fk2 = iztrans(Fz2, k)
```

运行结果：

$$\boxed{f_2[k] = 2\cdot 2^k + 2^k(k-1)} = (k+1)2^k u[k]$$

3.2 部分分式展开法求 Z 反变换

离散序列 Z 变换表示为标准形式

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{14}$$

其部分分式展开式为（无重极点时）

$$F(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \cdots + \frac{r_n}{1 - p_n z^{-n}} + k_1 + k_2 z^{-1} + \cdots \tag{15}$$

若有重极点，例如第一个极点 p_1 的重数为 3，则

$$F_1(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{(1 - p_1 z^{-1})^2} + \frac{r_3}{(1 - p_n z^{-n})^3} \tag{16}$$

在 MATLAB 中，可以用 `residuez()` 函数实现上述部分分式展开，调用格式为

```
[r, p, k] = residuez(num, den)
```

其中，参数 `num` 为式(14)中的分子多项式系数向量，`den` 为式(14)中的分母多项式系数向量，如果遇到多项式乘法，可以先利用 `conv()` 进行多项式展开。返回值 `r` 为极点的系数，`p` 为极点，`k` 为假分式化为真分式分离出来的 z^{-1} 的整数幂次项，系数按高次到低次幂的顺序排列，对应的形式如公式(15)和(16)所示。

例：求 $F(z)$ 的 Z 反变换 $f[k]$，其中

$$F(z) = \frac{z^3}{(z-2)^2(z-4)}, \quad |z| > 4 \tag{17}$$

先将 $F(z)$ 化为标准形式

$$F(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}, \quad |z| > 4 \tag{18}$$

显然这是一个有理真分式（注意要看式(18)而不是(17)）。求部分分式展开的程序为

```
num = 1;
den = conv( conv([1, -2], [1, -2]), [1 -4]);
[r, p, k] = residuez(num, den)
```

返回参数为

```
r = 4.0000
   -2.0000
   -1.0000
p = 4.0000
    2.0000
    2.0000
k = []
```

这表示部分分式展开后，极点 4 的系数为 4，极点 2（二重）的系数为 -2 和 -1，没有 z^{-1} 的整数次幂项。因此直接写出部分分式展开式

$$F(z) = \frac{4}{1-4z^{-1}} + \frac{-2}{1-2z^{-1}} + \frac{-1}{(1-2z^{-1})^2}$$

从而 Z 反变换为

$$f[k] = \left(4 \cdot 4^k - 2 \cdot 2^k - (k+1)2^k\right) u[k]$$

还可以利用 iztrans() 函数验证上述结果，程序为

```
Fz = ( z^3 ) / ( (z-2)^2 * (z-4) )
fk = iztrans(Fz, k)
```

运算结果为：

$$f[k] = \left(4 \cdot 4^k - 4 * 2^k - (k-1) * 2^k\right) u[k]$$

变形后验证与部分分式展开法获得的结果一致。

3.3 系统函数的零极点分析

对于一般的系统函数 $H(z)$，可以利用 tf2zp() 函数求它的零极点增益模型，即将式(9)化为式(11)，调用格式为

```
[z, p, k] = tf2zp(num, den)
```

其中，num 和 den 为分子与分母多项式系数向量。

例： 已知某系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.005z^{-2} + 0.3z^{-3}} \tag{19}$$

绘制其零极点分布图，分析稳定性。

利用 tf2zp() 函数实现的程序为

```
num = [1, 2, 1];
den = [1, -0.5, -0.005, 0.3];
[z, p, k] = tf2zp(num, den)      % 返回零点、极点、增益
pp = abs(p)                      % 所有极点的模
figure(1)
H1 = plot(real(p), imag(p), 'rx', 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 2);
hold on
H2 = plot(real(z), imag(z), 'bo', 'MarkerSize', 8, 'LineWidth', 2);
grid on
xlabel('Real Axis', 'FontSize', 12)
ylabel('Imag Axis', 'FontSize', 12)
title('By the tf2zp() method', 'FontSize', 12)
legend([H1; H2], 'Poles', 'Zeros', 'FontSize', 12)
```

注： 在复平面上绘制零极点时，需要用到求复数点实部的 `real()` 函数和虚部的 `image()` 函数。与连续时间 LTI 系统的 S 域分析一样，也可以用 `roots()` 计算。

利用 `zplane()` 函数实现的程序为

```
num = [1, 2, 1];
den = [1, -0.5, -0.005, 0.3];
figure(2)
H3 = zplane(num, den)
H3 = findobj(gca, 'type', 'line')
set(H3, 'MarkerSize', 10, 'LineWidth', 1.5)
xlabel('Real Axis', 'FontSize', 12)
ylabel('Imag Axis', 'FontSize', 12)
```

从图中可以看到所有极点都在 Z 平面的单位圆内，故判定离散时间 LTI 系统是稳定的。

接下来，利用 `impz()` 函数和 `freqz()` 分别绘制该系统的单位脉冲响应和频率响应曲线验证稳定性。

```
num = [1, 2, 1];
den = [1, -0.5, -0.005, 0.3];

[h, k] = impz(num, den, 30);
[H, w] = freqz(num, den);

figure(1)
stem(k, h, 'r', 'LineWidth', 2)
xlabel('k')
title('单位脉冲响应')

figure(2)
plot(w, abs(H), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('\Omega')
title('幅度响应')
```

4 实验内容

1. 用 MATLAB 求时域信号 $f_1[k] = \cos(\pi k)u[k]$ 的 Z 变换 $F_1(z)$，并求 $F_2(z) = \dfrac{1}{(1-4z^{-1})^2}$ 的 Z 反变换 $f_2[k]$。
2. 教材 304 页第 M8-1 题：求以下两个 $F(z)$ 的部分分式展开式，并写出 $f[k]$ 的表达式。

$$F[z] = \frac{2z^4+16z^3+44z^2+56z+32}{3z^4+3z^3-15z^2+18z-12}$$

$$F[z] = \frac{4z^4-8.68z^3-17.98z^2+26.74z-8.04}{z^4-2z^3+10z^2+6z+65}$$

3. 针对第 2 题中两个 $F(z)$，请完成：
   (1) 求它们的的零点和极点（附上运算结果）；
   (2) 画出该系统的零极点分布图，并根据分布情况判断系统的稳定性；
   (2) 求该系统的单位脉冲响应、阶跃响应和频率响应，验证得到的稳定性结论。

5 实验报告

1. 简述实验目的和实验原理。
2. 完成实验内容部分的第 1–3 题，要求独自完成程序编写和绘图，写入报告。
3. 总结实验过程，记录结果与体会。

参考文献

[1] 陈后金, 胡健, 薛健. 信号与系统 (第三版). 北京: 清华大学出版社, 2017.

[2] 龚晶, 许凤慧, 卢娟, 等. 信号与系统实验. 北京: 机械工业出版社, 2022.

[3] 徐亚宁, 唐璐丹, 王旬, 等. 信号与系统分析实验指导书 (MATLAB 版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.