目录

实验八　信号的时域采样与重建

江苏师范大学 • 电气工程及自动化学院 • 李灿

1　实验目的

1. 掌握掌握信号采样的基本原理（时域采样定理）；
2. 理解采样对信号的时域和频域特性的影响；
3. 掌握频谱恢复时域信号（谐波叠加）的实现方法。

2　实验原理

2.1　信号的采样

离散时间序列 $f(kT)$ 可以由连续时间信号 $f(t)$ 进行等间隔采样获得，其中 T 为采样间隔。在规定采样间隔之后，离散序列可以记为 $f[k] = f(kT)$。

为了利用 Fourier 变换对采样信号进行频域分析，记采样之后的信号为 $f_{\mathrm{s}}(t)$，则

$$f_{\mathrm{s}}(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = f(t)\delta_T(t) \tag{1}$$

其中 $\delta_T(t)$ 为周期冲激串，定义为

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{2}$$

其 Fourier 变换为

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_{\mathrm{s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_{\mathrm{s}}) \tag{3}$$

式中 $\omega_{\mathrm{s}} = 2\pi/T$ 为采样角频率。根据 Fourier 变换的乘积特性，可知 $f_{\mathrm{s}}(t)$ 的 Fourier 变换为

$$F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}[f(t)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega) * \omega_{\mathrm{s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_{\mathrm{s}}) \tag{4}$$

再利用冲激信号的卷积特性

$$F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega-n\omega_{\mathrm{s}}) \tag{5}$$

对比原信号的 Fourier 变换 $F(\mathrm{j}\omega)$ 和采样之后信号的 Fourier 变换 $F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)$，可以发现 $F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)$ 是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 在频率轴上以 ω_{s} 为长度进行左右平移叠加而成。如果原信号 $F(\mathrm{j}\omega)$ 为带限信号，即存在最高角频率 ω_{m}，当 $|\omega| > \omega_{\mathrm{m}}$ 时 $F(\mathrm{j}\omega)$ 为 0，那么就有可能找到合适的 ω_{s}，使得 $F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)$ 中的

$F(\mathrm{j}\omega - n\omega_{\mathrm{s}})$ 之间不发生混叠，从而不会因采样而引起的部分频率分量丢失。Nyquist 采样定理说明，当取 $\omega_{\mathrm{s}} > 2\omega_{\mathrm{m}}$ 时，不会发生混叠，信号采样后不会失真，这样的采样频率称为 Nyquist 频率。需要注意，Nyquist 频率是一个充分而非必要条件。对于一般的带通信号，如果 ω_{m} 是信号带宽 B 的整数倍，则只需 $\omega_{\mathrm{s}} \geqslant 2B$。

2.2 信号的重建

上一节讲到，可以选取合适的采样频率 ω_{s} 保证信号采样之后的频谱 $F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega)$ 不会出现 $F(\mathrm{j}\omega - n\omega_{\mathrm{s}})$ 中不同 n 之间的混叠。只要不发生混叠，取 $F(\mathrm{j}\omega - n\omega_{\mathrm{s}})$ 中 $n=0$ 的那个周期内的频率，就能得到原信号的频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$，二者之间只差一个常数。那如何取出来呢？立即想到低通滤波器可以筛选出低频分量的特性，只需让采样后的信号通过一个理想低通滤波器就能无失真地恢复原始信号，即有

$$F(\mathrm{j}\omega) = H_{\mathrm{r}}(\mathrm{j}\omega) F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) \tag{6}$$

其中 $H_{\mathrm{r}}(\mathrm{j}\omega)$ 就是理想低通滤波器的频率，定义为

$$H_{\mathrm{r}}(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leqslant \omega_{\mathrm{c}} \\ 0, & |\omega| > \omega_{\mathrm{c}} \end{cases} := T p_{2\omega_{\mathrm{c}}}(\omega) \tag{7}$$

式中滤波器的截止频率 ω_{c} 需满足 $\omega_{\mathrm{m}} < \omega_{\mathrm{c}} \leqslant \omega_{\mathrm{s}}/2$，$T$ 为采样周期。

下面不妨取 $\omega_{\mathrm{c}} = \omega_{\mathrm{s}}/2$ 进行展示。因为

$$h_r(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_{\mathrm{r}}(\mathrm{j}\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[T p_{2\omega_{\mathrm{c}}}(\omega)] = \mathrm{Sa}(\omega_{\mathrm{c}} t) \tag{8}$$

$$f_{\mathrm{s}}(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \tag{9}$$

故由式(6)可得

$$f(t) = h_r(t) * f_{\mathrm{s}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot h_r(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{2}(t-kT)\right) \tag{10}$$

将 $\omega_{\mathrm{s}} = \frac{2\pi}{T}$ 代入，即获得最终的信号重建公式（时域下）

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right) \tag{11}$$

如果在 MATLAB 中采用抽样函数 `sinc()`，则由 $\mathrm{Sa}(t) = \mathrm{sinc}(t/\pi)$ 得

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{1}{T}(t-kT)\right) \tag{12}$$

注：也可以先在频域下利用式(6)直接计算出 $F(\mathrm{j}\omega)$，再进行 Fourier 反变换获得恢复的信号 $f(t)$。

3 程序讲解

3.1 信号的采样与频谱分析

本节的涉及的 Fourier 变换均采用基于定义式的数值解法。已经知道连续时间信号的 Fourier 变换为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{13}$$

积分结果是一个关于频率 ω 的函数。根据积分的极限定义式

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot(k\Delta)}\cdot\Delta \tag{14}$$

只要 Δ 充分小，在计算机中就可以用下式进行近似

$$F(\mathrm{j}\omega)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot k}\cdot\Delta \tag{15}$$

实际信号大多为时限信号，k 的取值范围是有限的，给定 k 的范围和想要表示频谱的频率 ω 的范围，上式结果变为有限求和的向量。这可以通过循环相加来实现，但更高效的是直接利用矩阵乘法实现，具体格式为

```
Fw = fk * exp( -1j * k' * w ) * Delta
```

其中，`k` 是行向量（即 `k'` 是列向量），`Omega` 是列向量，`Delta` 是离散化步长（充分小的常值）。由 `k'*Omega` 构成一个矩阵，矩阵的每一列表示特定频率点对应不同时刻的频谱分量，`fk`（行向量）与矩阵 `exp(-1j*k'*Omega)` 相乘，即获得由各频率点的频谱值（每个点都是 `k` 个分量求和）构成的向量。注意：在 MATLAB 中，`exp([a, b, c]) = [exp(a), exp(b), exp(c)]`。采样后的离散序列也可以利用式(15)进行计算，其中 Δ 就是采样周期 T_s。

例：已知某连续时间信号 $f(t)=\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_0)$，$\omega_0=2\pi$，假设信号的最高角频率为 $\omega_\mathrm{m}=5\omega_0$，分别对 $f(t)$ 以 $\omega_\mathrm{s}=4\omega_\mathrm{m}$、$\omega_\mathrm{s}=2\omega_\mathrm{m}$ 和 $\omega_\mathrm{s}=\frac{1}{2}\omega_\mathrm{m}$ 进行采样，并绘制采样后的信号图。

实现程序如下：

```
figure('position', [0, 0, 800, 800])
% 原连续时间信号
w0 = 2*pi;
wm = 5*w0;
t = linspace(-3, 3, 1000);
ft = sin(w0*t) + (1/3)*sin(3*w0*t);
subplot(4, 1, 1)
plot(t, ft, '-r', 'linewidth', 1.5)
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$f(t)$', 'interpreter', 'latex')
% 采样后的离散序列
ws = [4, 2, 1/2] * wm;
```

```
for i = 1 : 3
   Ts = 2*pi / ws(i);
   k = -3 : Ts : 3;
   fk = sin(w0*k) + (1/3)*sin(3*w0*k);
   subplot(4, 1, i+1)
   stem(k, fk, '-b', 'filled')
   ylabel('$f[k]$', 'interpreter', 'latex')
end
xlabel('$k$', 'interpreter', 'latex')
```

运行结果如图1所示。

例：对上例中原信号 $f(t)$ 和采样信号 $f[k]$ 进行频谱分析。

实现程序如下（与上一段程序放在同一个脚本中）：

```
% 频谱分析
% 原信号的频谱
figure('position', [0, 0, 800, 800])
N = length(t);
Delta = ( max(t)-min(t) ) / N;
k1 = t;
w = -30*w0 : 0.001 : 30*w0;
F1 = ft * exp( -1j * k1' * w ) * Delta;
subplot(4, 1, 1)
plot(w/w0, abs(F1), '-r')
ylabel('$F(\mathrm{j}\omega)$', 'interpreter', 'latex')
% 采样后信号的频谱
for i = 1 : 3
    Ts = 2*pi / ws(i);
    ks = -3 : Ts : 3;
    fk = sin(w0*ks) + (1/3)*sin(3*w0*ks);
    Fw = fk * exp( -1j * ks' * w ) * Ts;
    subplot(4, 1, i+1)
    plot(w/w0, abs(Fw), '-b')
    ylabel('$F(\mathrm{j}\omega)$', 'interpreter', 'latex')
end
xlabel('$\omega/\omega_0$', 'interpreter', 'latex')
```

分析结果：当 $\omega_\mathrm{s} \geqslant 2\omega_\mathrm{m}$ 时，不发生混叠，根据时域采样定理，此时信号采样后不会失真。运行结果如图2所示。

3.2 信号的重建——时域角度

直接利用2.2节导出的信号重建公式（内插公式）来恢复原连续时间信号。程序如下

```
% 信号重建：时域角度
figure('position', [0, 0, 800, 800])
% 原连续时间信号
w0 = 2*pi;
wm = 5*w0;
t = linspace(-3, 3, 1000);
ft = sin(w0*t) + (1/3)*sin(3*w0*t);
% ft = rectpuls(t, 2);
subplot(4, 1, 1)
plot(t, ft, '-r', 'linewidth', 1.5)
xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$f(t)$', 'interpreter', 'latex')
% 采样后的离散序列，并用插值公式重建
ws = [4, 2, 1/2] * wm;
for i = 1 : 3
Ts = 2*pi / ws(i);
kT = -3 : Ts : 3;
fk = sin(w0*kT) + (1/3)*sin(3*w0*kT);
ft_rec = fk * sinc( (1/Ts) * (ones(length(kT),1)*t - kT'*ones(1,length(t))) );
subplot(4, 1, i+1)
hold on
stem(kT, fk, '-b')
plot(t, ft_rec, '-k', 'linewidth', 1.5)
ylabel('$f_{\mathrm{rec}}(t)$', 'interpreter', 'latex')
end
xlabel('$k$ or $t$', 'interpreter', 'latex')
```

其中内插公式的实现为

```
ft_rec = fk * sinc( (1/Ts) * (ones(length(kT),1)*t - kT'*ones(1,length(t))) );
```

如果不习惯矩阵乘法表示，也可以用循环实现（效率较低），即将内插公式这句改写为

```
ft_rec = zeros(length(t), 1);
for nt = 1 : length(t)
    ft_rec(nt) = fk * sinc( (1/Ts) * (t(nt) - kT') ) ;
end
```

运行结果如图3所示。

4 实验内容

1. 已知某连续时间信号 $f(t)=u(t+1)-u(t-1)$，$\omega_0=2\pi$，假设信号的最高角频率为 $\omega_{\mathrm{m}}=5\omega_0$，分别对 $f(t)$ 以 $\omega_{\mathrm{s}}=4\omega_{\mathrm{m}}$、$\omega_{\mathrm{s}}=2\omega_{\mathrm{m}}$ 和 $\omega_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}\omega_{\mathrm{m}}$ 进行采样，并绘制采样后的信号图。

2. 针对第 1 题中的信号 $f(t)$ 及其采样信号：
   (1) 分别绘制幅度频谱图；
   (2) 分析幅度频谱的特性，判断何时可以认为采样信号的频谱没有发生混叠，说明理由。
3. 针对第 2 题中的采样信号：
   (1) 利用时域中的内插公式进行信号重建；
   (2) 对比重建的信号与原始信号图，描述相应的结论，如何验证时域采样定理的？

5 实验报告

1. 简述实验目的和实验原理。
2. 完成实验内容部分的第 1–3 题，要求独自完成程序编写和绘图，写入报告。
3. 总结实验过程，记录结果与体会。

参考文献

[1] 陈后金, 胡健, 薛健. 信号与系统 (第三版). 北京: 清华大学出版社, 2017.

[2] 龚晶, 许凤慧, 卢娟, 等. 信号与系统实验. 北京: 机械工业出版社, 2022.

[3] 徐亚宁, 唐璐丹, 王旬, 等. 信号与系统分析实验指导书 (MATLAB 版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.

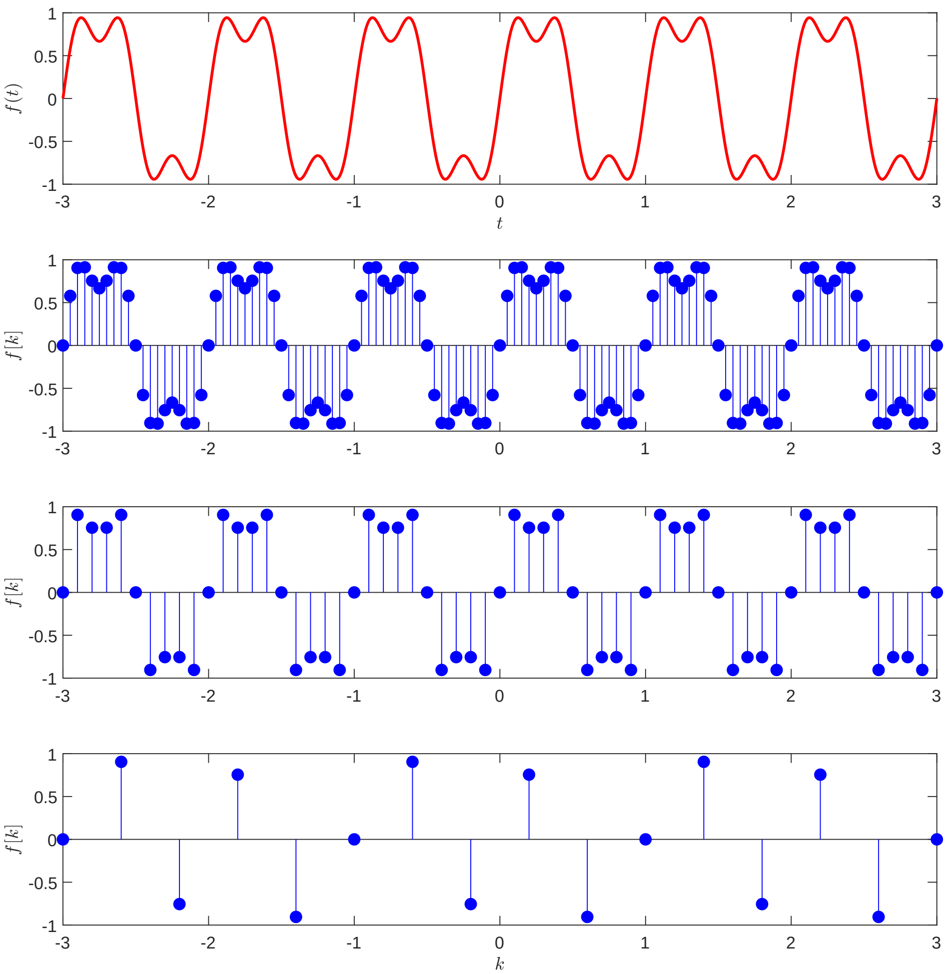

图 1: 信号及其采样

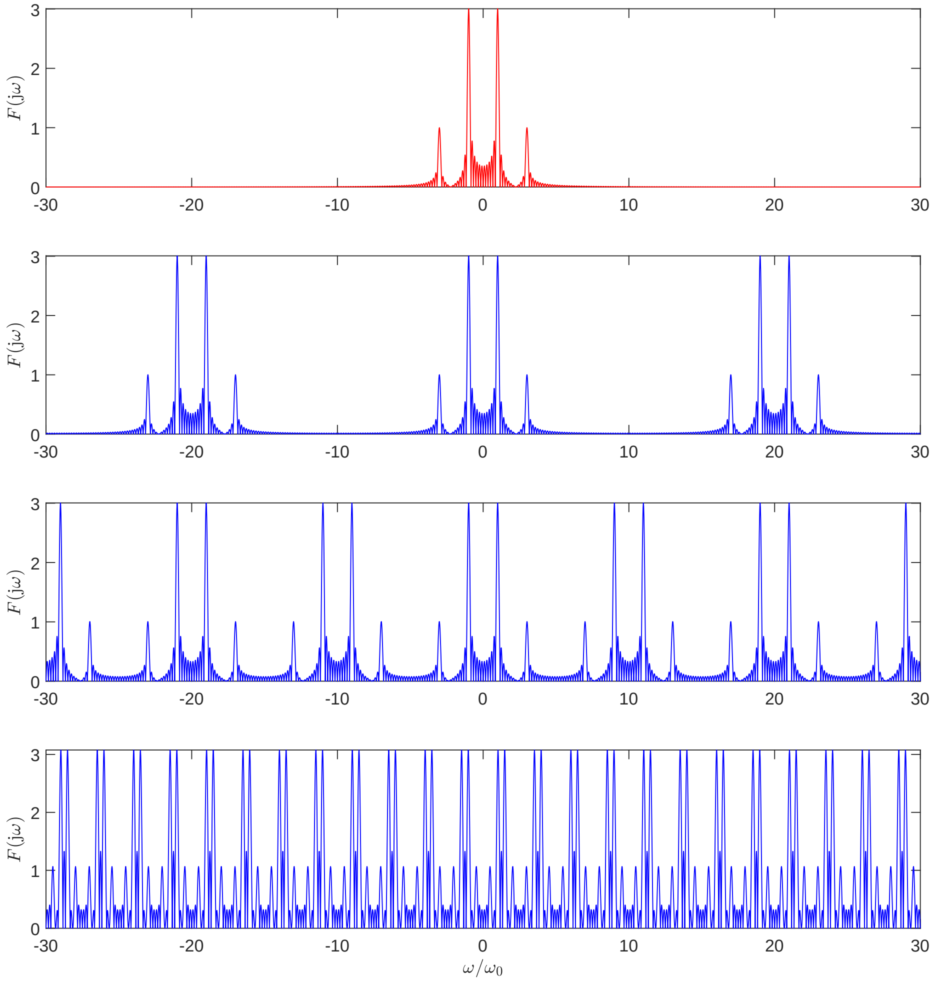

图 2: 信号与采样信号的幅度频谱

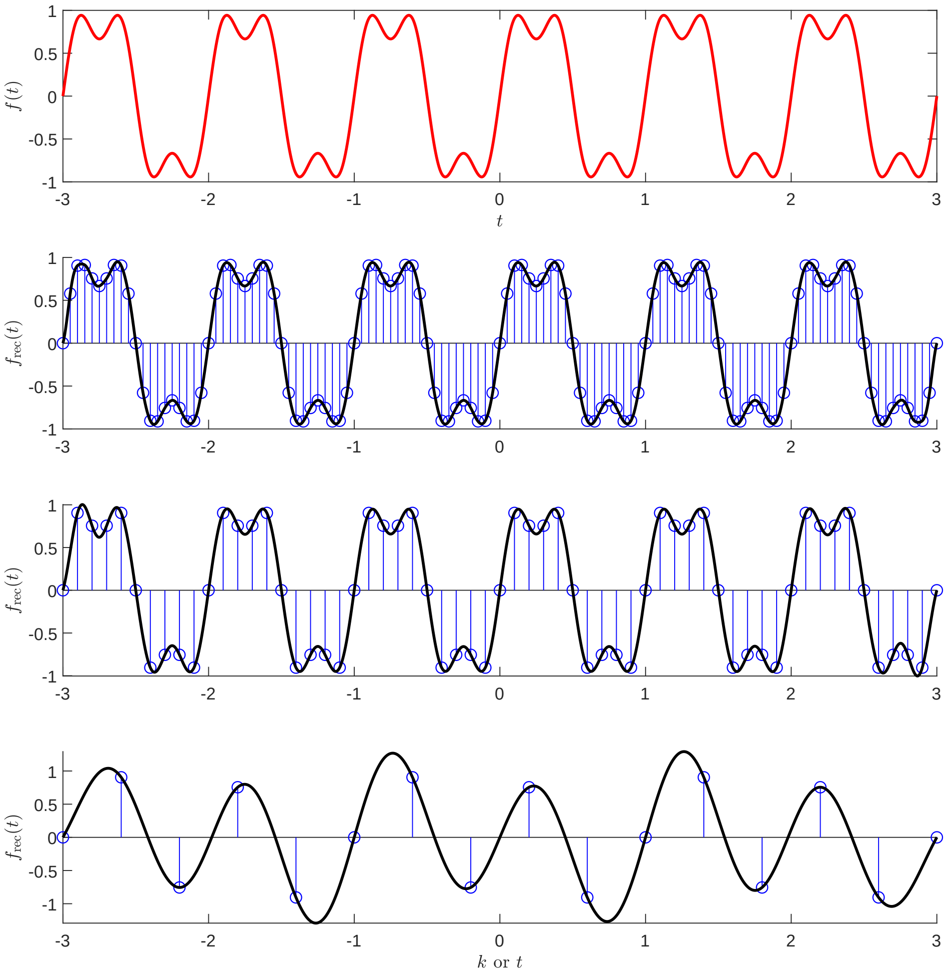

图 3: 信号的重建效果图