第2章 信号的时域分析

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | https://sslic.cn/ss

本章主要内容

- 连续时间信号的时域描述
- 连续时间信号的基本运算
- 确定信号的时域分解

§2.1 连续时间信号的时域描述

2.1-0 基本信号

- 涵义：可以用于构成各种复杂信号的典型特征信号
- 数学：对应基本数学函数、广义函数

• 普通信号： 直流 | 正弦 | 指数 | 抽样

• 奇异信号： 阶跃 | 斜坡 | 冲激 | 冲激偶

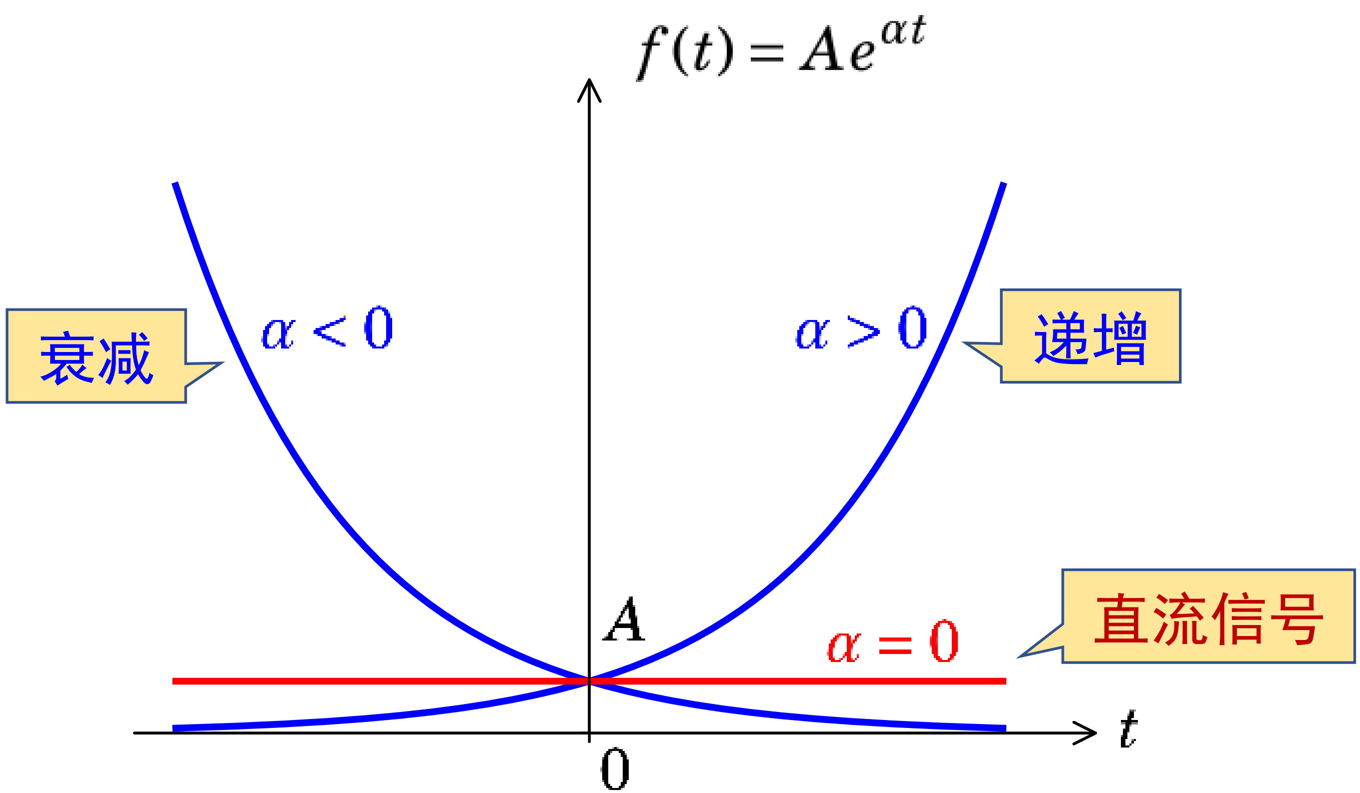
本身或高阶导数存在间断点

1. 常见绝大部分信号均可用基本信号及其变化形式描述
2. 基本信号的分析是信号与系统分析的基础

2.1-1 实指数信号与直流信号

- 定义：$f(t) = Ae^{\alpha t}$， $A,\ \alpha,\ t \in \mathbb{R}$

重要性质：
微分、积分
保指数形式

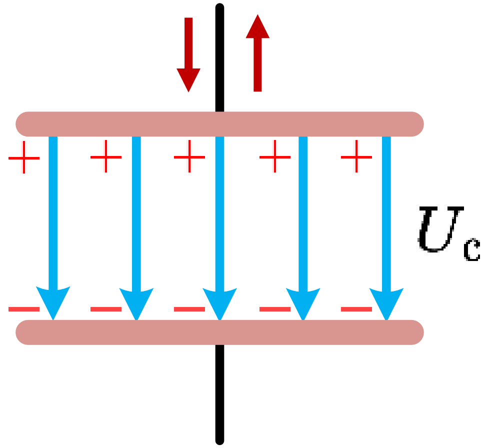


实指数信号

2.1-1 实指数信号与直流信号

□ 直流信号

□ 实指数信号



充电

$$U_c = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

放电

$$U_c = U_0 e^{-\frac{t}{\boxed{RC}}}$$

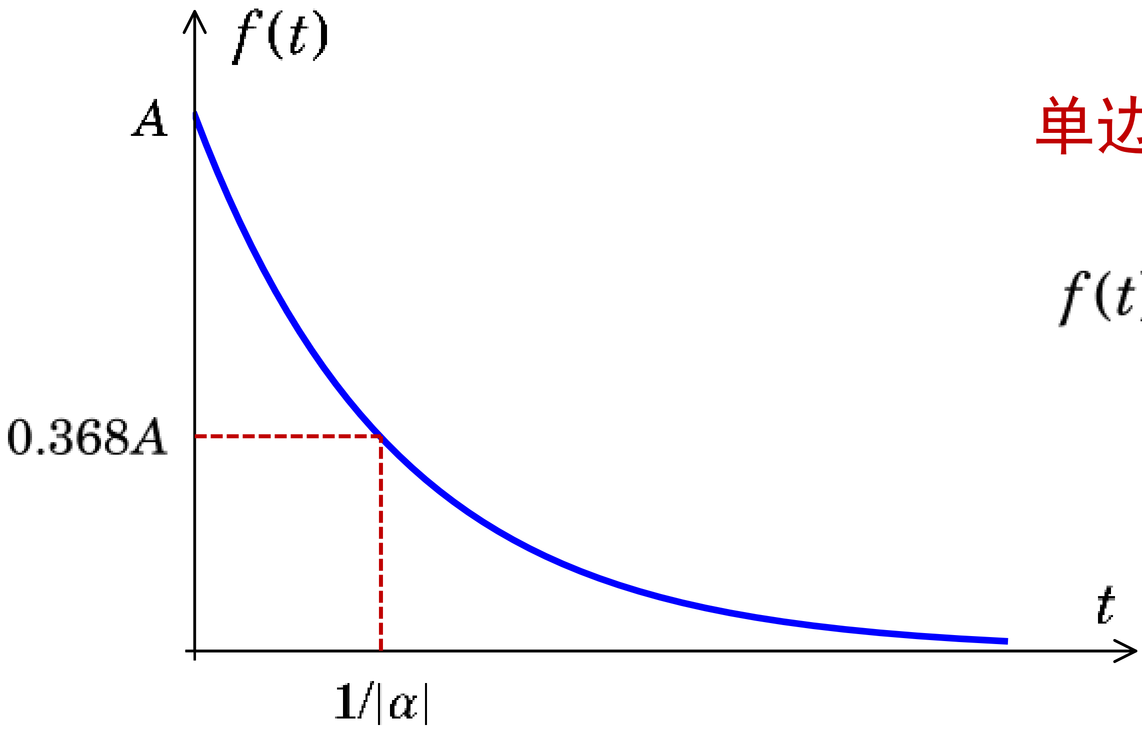
时间常数

2.1-1 实指数信号与直流信号

- 指数信号的时间常数：$\tau = \dfrac{1}{|\alpha|}$
  - 若 $\alpha < 0$，时间常数越小，信号衰减越快
  - 若 $\alpha > 0$，时间常数越小，信号增长越快

$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0.368A$$

信号幅值衰减到原来的36.8%所需时间



单边指数衰减信号：

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & t \geqslant 0,\ \alpha > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

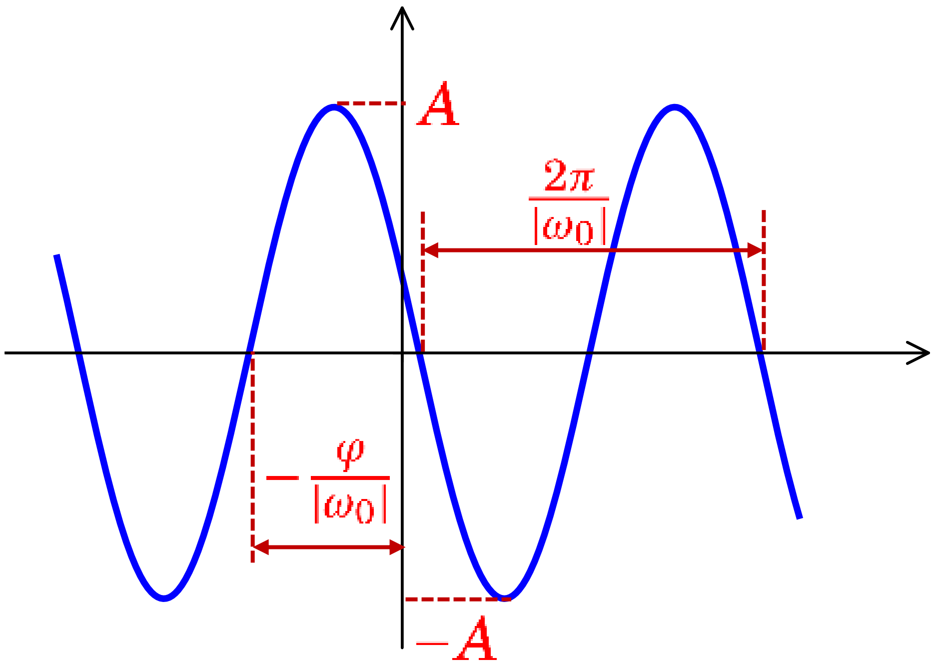
2.1-2 虚指数信号与正弦信号

- 虚指数信号：$f(t)=e^{\mathrm{j}\omega_0 t},\quad t\in\mathbb{R}$
- 正弦信号：$f(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi),\quad t\in\mathbb{R}$

初始相位

振幅

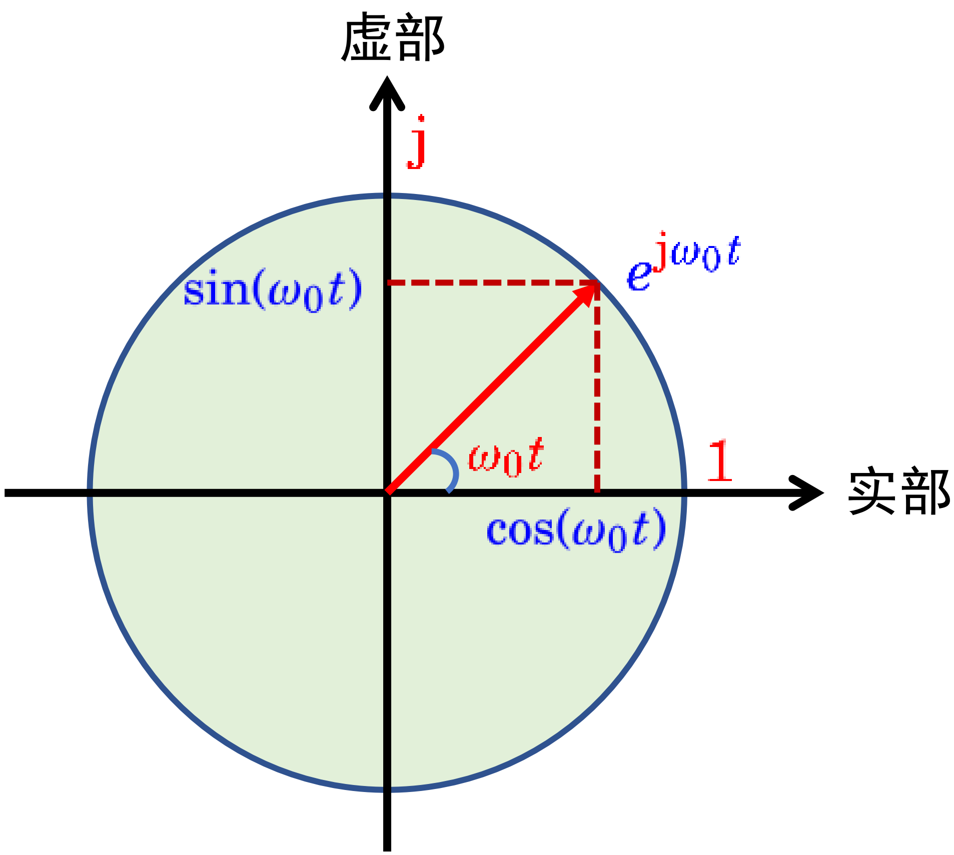
角频率



- 正弦/余弦信号相位相差 $\pi/2$
- 虚指数信号与正弦信号可以相互转化(欧拉公式)
- 虚指数信号为周期信号

2.1-2 虚指数信号与正弦信号

- 欧拉公式：$e^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$



2.1-2 虚指数信号与正弦信号

- 欧拉公式：$e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$
- 虚指数信号周期性证明：

$$e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = e^{\mathrm{j}\omega_0 (t+T_0)} = e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\overbrace{e^{\mathrm{j}\omega T_0}}^{1}$$

$$\Uparrow$$

$$\cos(\omega_0 T_0) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 T_0) = 1$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

- 虚指数信号与正弦信号转化

$$e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$$

$$e^{-\mathrm{j}\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t} + e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$$

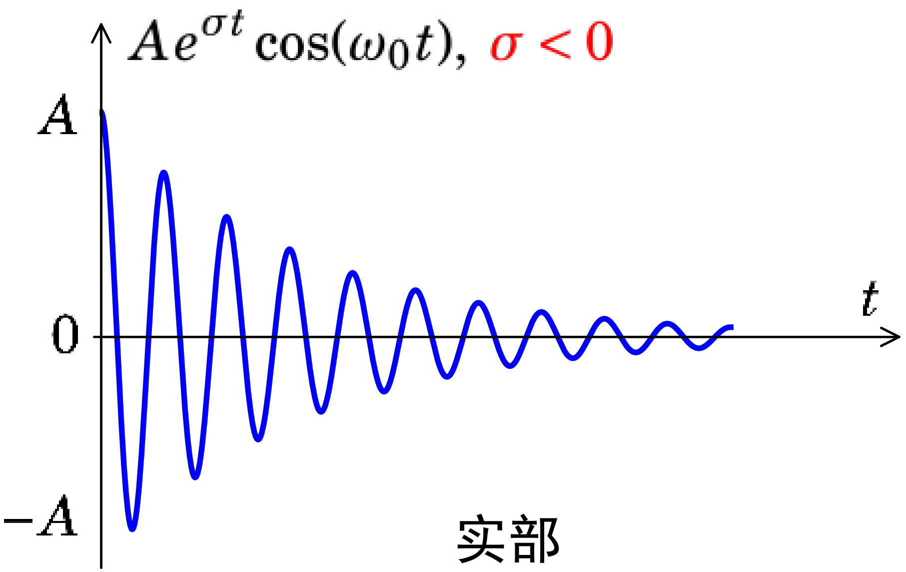
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t} - e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$$

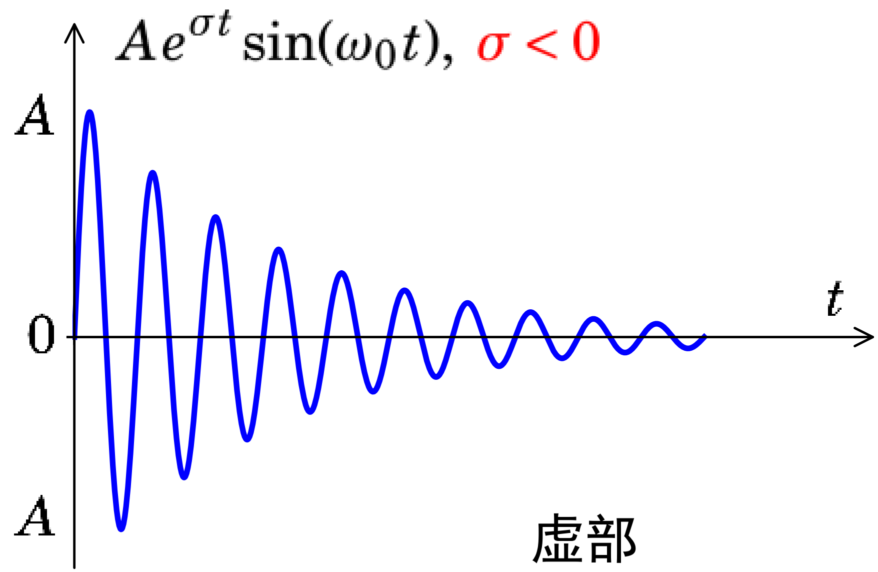
重要性质：
微分、积分
保指数形式

2.1-3 复指数信号

- 复指数信号：$f(t)=Ae^{st}$，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega_0$，$A, t\in\mathbb{R}$

$$Ae^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)t}=Ae^{\sigma t}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\underbrace{Ae^{\sigma t}\cos(\omega_0 t)}_{\text{实部}}+\mathrm{j}\underbrace{Ae^{\sigma t}\sin(\omega_0 t)}_{\text{虚部}}$$

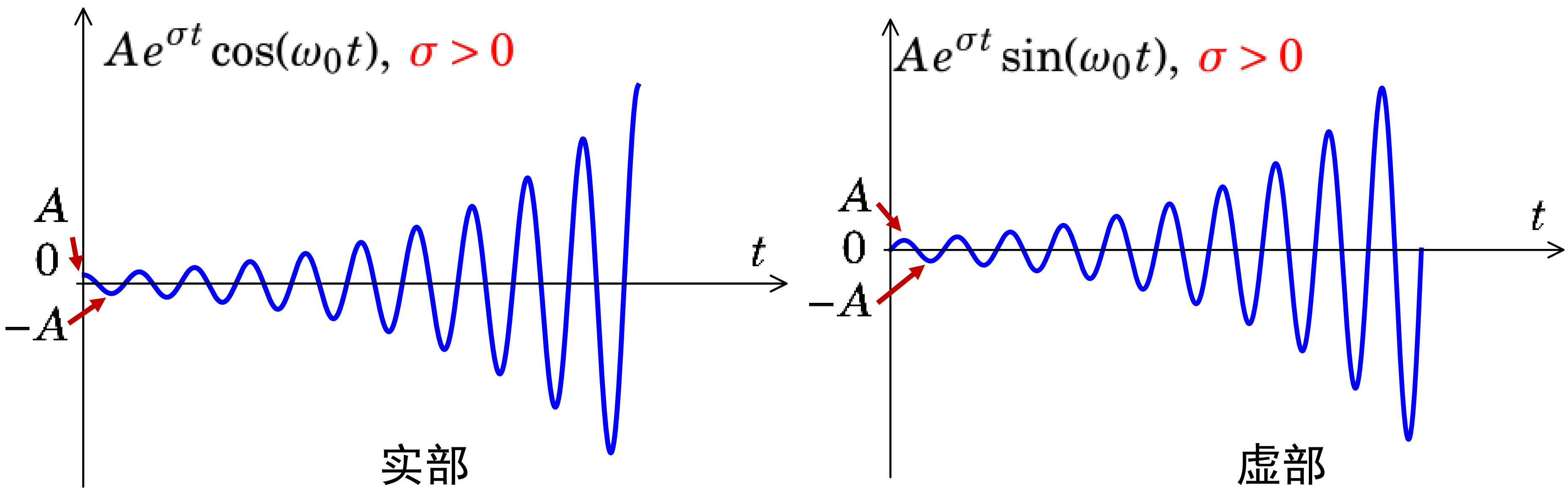




2.1-3 复指数信号

- 复指数信号：$f(t)=Ae^{st}$，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega_0$，$A, t\in\mathbb{R}$

$$Ae^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)t}=Ae^{\sigma t}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\underbrace{Ae^{\sigma t}\cos(\omega_0 t)}_{\text{实部}}+\mathrm{j}\underbrace{Ae^{\sigma t}\sin(\omega_0 t)}_{\text{虚部}}$$



2.1-3 复指数信号

- 复指数信号：$f(t)=Ae^{st}$，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega_0$，$A,\ t\in\mathbb{R}$

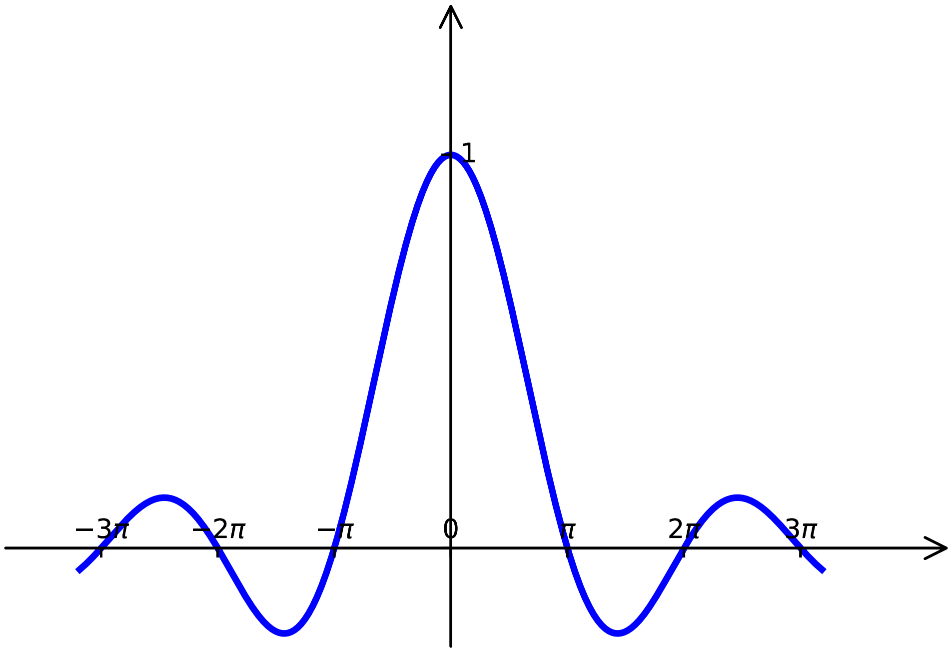
$$Ae^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)t}=Ae^{\sigma t}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\underbrace{\boxed{Ae^{\sigma t}\cos(\omega_0 t)}}_{\text{实部}}+\mathrm{j}\underbrace{\boxed{Ae^{\sigma t}\sin(\omega_0 t)}}_{\text{虚部}}$$

复指数信号特点：

1. 物理上不可实现，但可用来表示常见的普通信号
2. 微分、积分保指数形式，可简化运算与分析

2.1-4 抽样函数

- 抽样函数： $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$



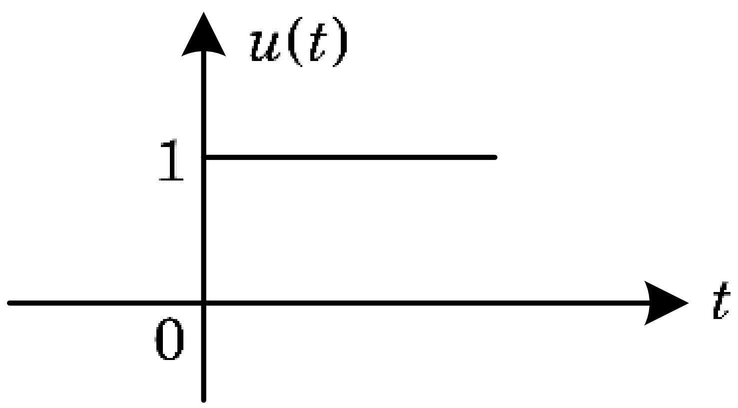
基本性质：

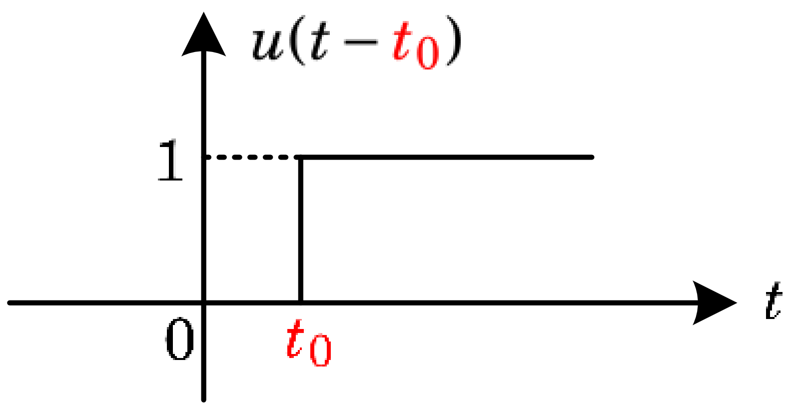
1. $\mathrm{Sa}(0)=1$
2. $\mathrm{Sa}(k\pi)=0,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(t)\mathrm{d}t=\pi$

2.1-5 单位阶跃信号（奇异）

□ 定义： $u(t)=\begin{cases}1, & t>0 \\ 0, & t<0\end{cases}$

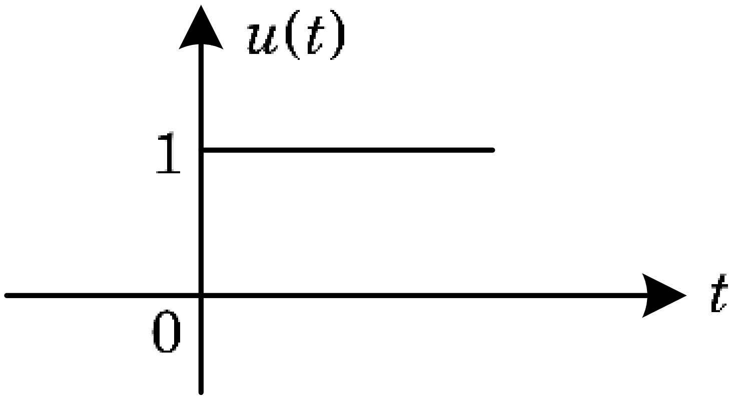
延时： $u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0 \\ 0, & t<t_0\end{cases}$

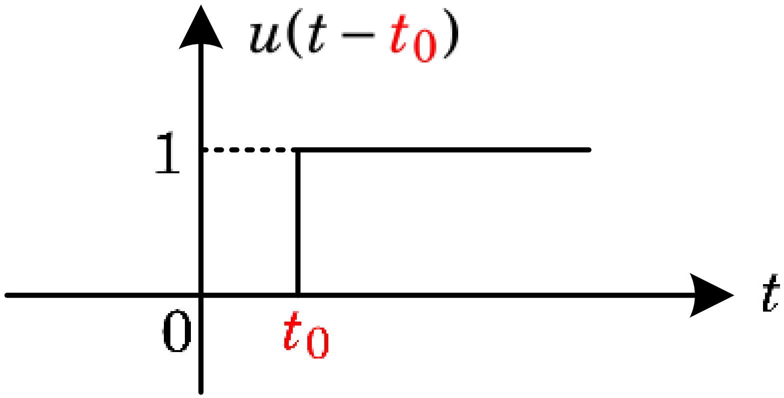


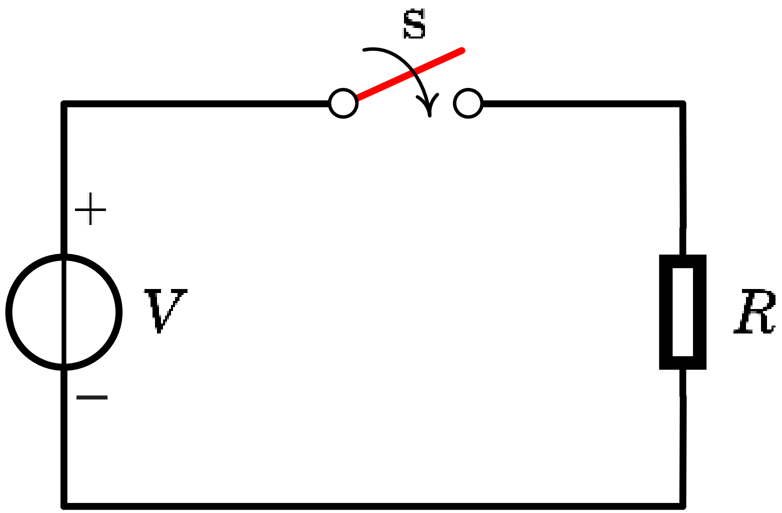


在 $t=0$ 处为间断点

2.1-5 单位阶跃信号（奇异）



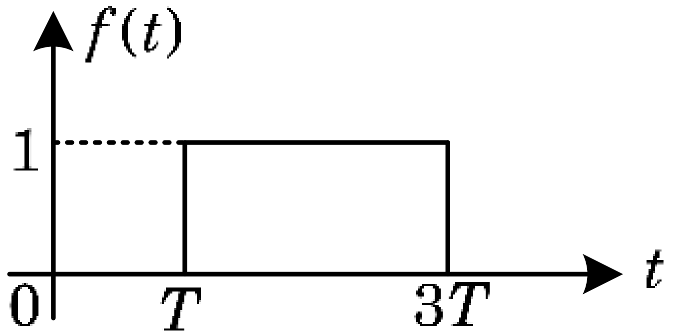




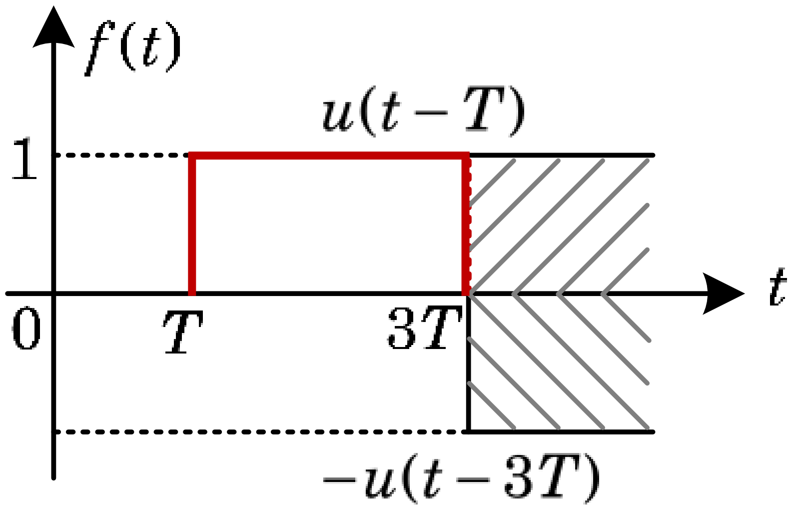
开关何时闭合

2.1-5 单位阶跃信号（奇异）

1. 利用阶跃信号与延时阶跃信号可表示任意矩形信号



$$f(t)=u(t-T)-u(t-3T)$$

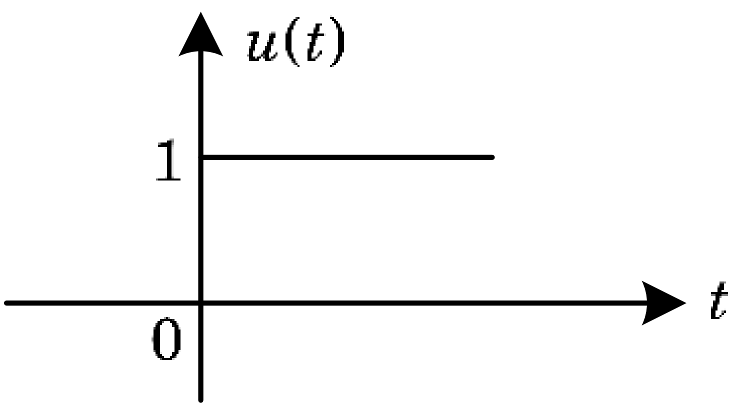


2. 利用单边性，截断与之相乘的任意信号，表示信号时间范围

$$f(t),\ -\infty<t<\infty \quad \rightarrow \quad f(t)u(t)=0,\ -\infty<t<0$$

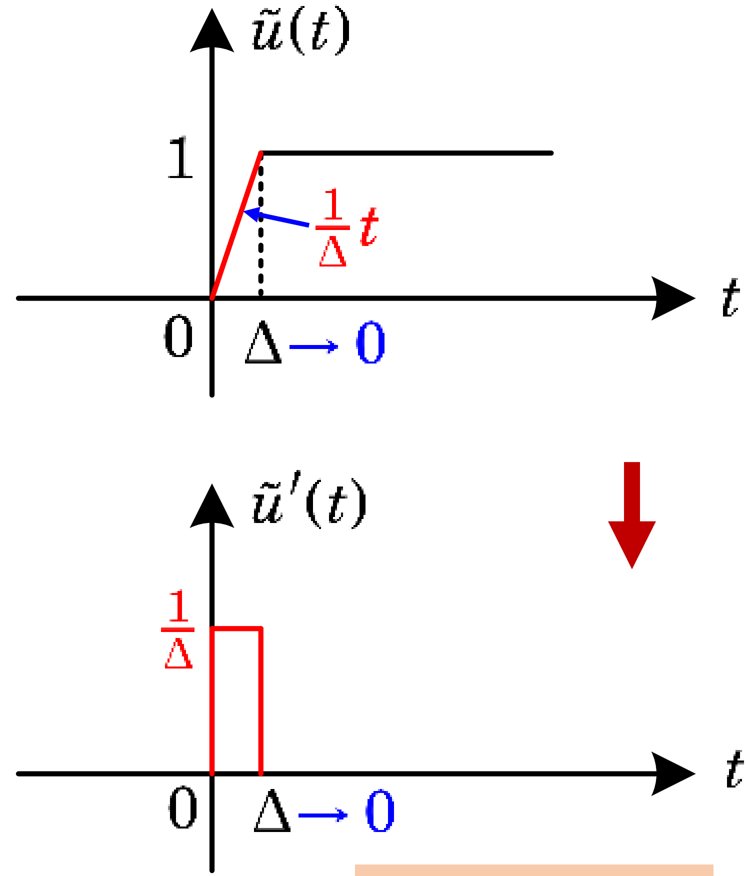
2.1-5 单位阶跃信号（奇异）

□ 定义：$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$



在 $t=0$ 处为间断点

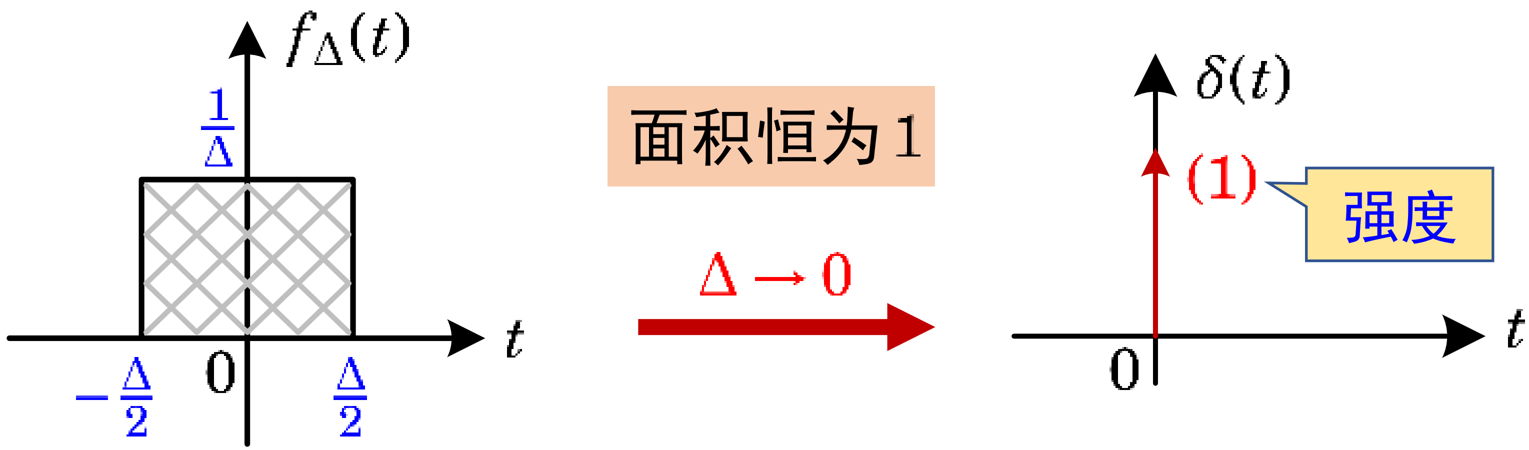
现实物理世界中能量不可瞬移



矩形脉冲函数

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

□ 普通信号的极限模型定义：



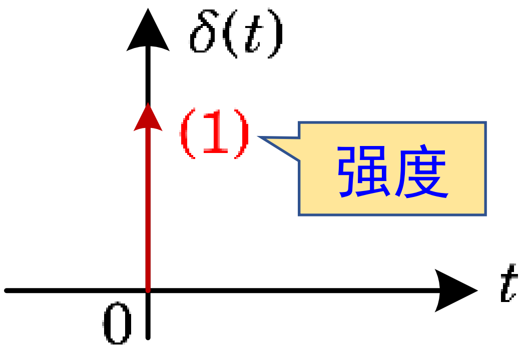
$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} f_\Delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[u\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)-u\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]$$

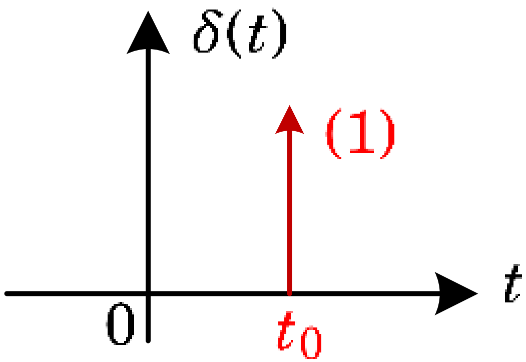
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\frac{1}{\Delta}\cdot 1\mathrm{d}t = 1$$

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 狄拉克 (Dirac) 定义：$\delta(t)$ 满足 $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0, \qquad t \neq 0 \end{cases}$

延时：$\delta(t)$ 满足 $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0, \qquad t \neq t_0 \end{cases}$

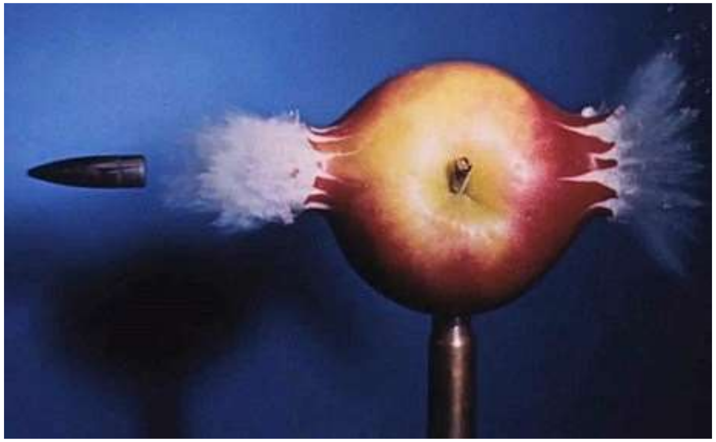


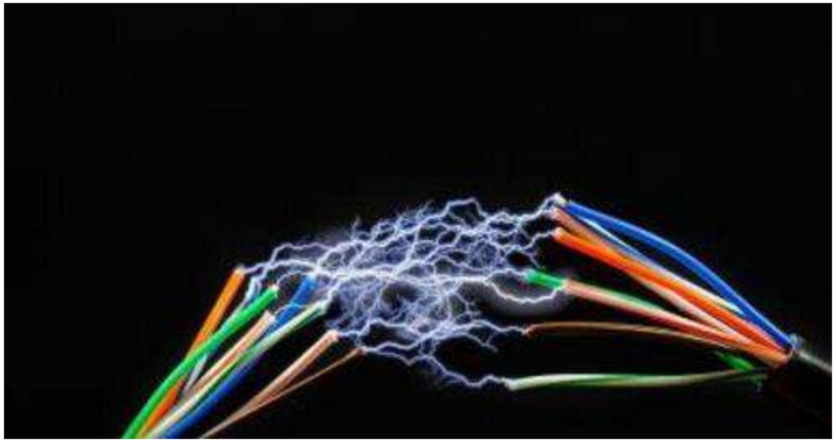


2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 狄拉克 (Dirac) 定义：$\delta(t)$ 满足 $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0, \qquad t \neq 0 \end{cases}$

意义：作用时间极短，幅值极大的信号模型

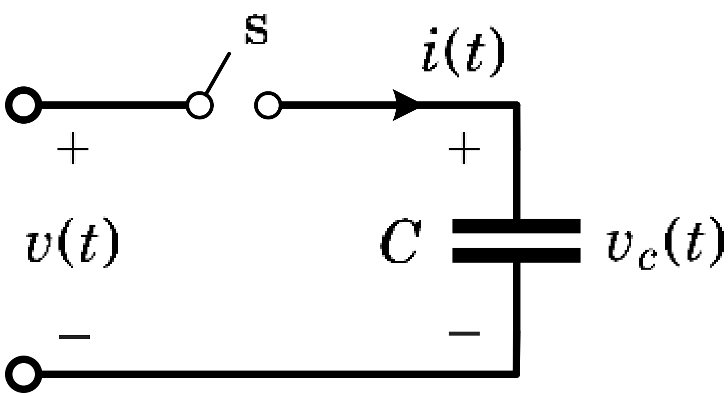




2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 狄拉克 (Dirac) 定义：$\delta(t)$ 满足 $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0, \qquad t \neq 0 \end{cases}$

意义：作用时间极短，幅值极大的信号模型



$$v_c(0_-) = 0$$

近乎短路

$$v_c(0_+) = 1$$

冲激电流

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} \to \infty$$

1. 冲激信号可用于表示其他任意信号
2. 冲激信号可用于表示信号间断点的导数

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 广义函数定义：$\delta(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\varphi(0)$

测试函数

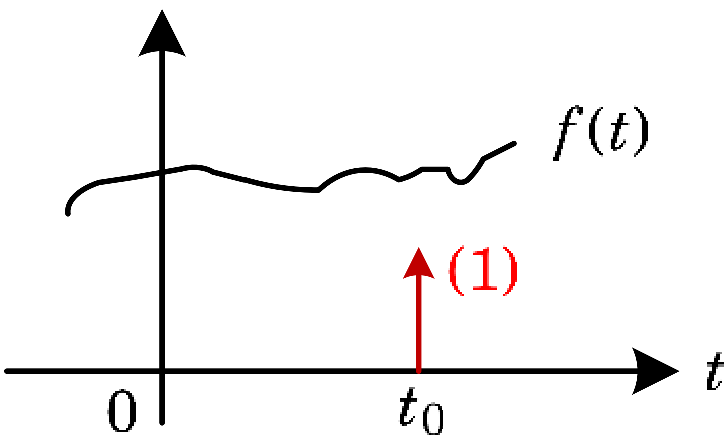
冲激信号的性质：

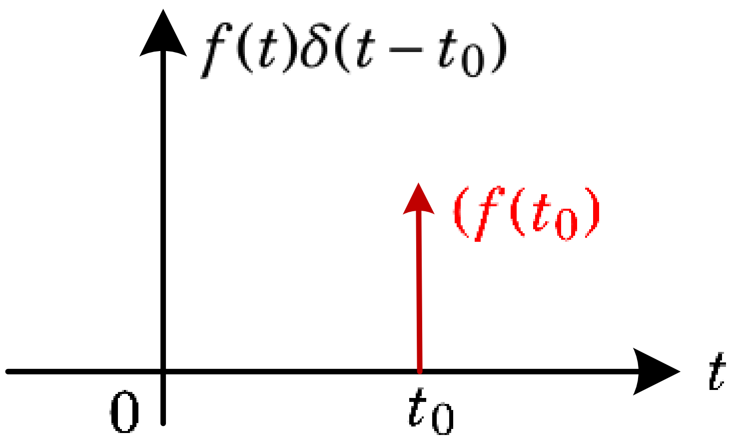
1. 筛选特性
2. 取样特性
3. 展缩特性
4. 卷积特性
5. 阶跃信号的导数

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 筛选特性：$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

因为 $t \neq t_0$ 时，$\delta(t-t_0)=0$，筛选出 $f(t_0)$





2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 取样特性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$

证明： 由筛选特性 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

两边积分运算

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$$

$$= f(t_0)\underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t}}_{=1}$$

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 展缩特性： $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

证明：借助广义函数定义 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\varphi(0)$

左边： $$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(\overset{\tau>0}{\overset{\parallel}{at}})\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}\varphi(0)\qquad a>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(\overset{\tau<0}{\overset{\parallel}{at}})\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{-a}\varphi(0)\qquad a<0$$

右边： $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}\varphi(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

- 展缩特性： $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

推论：

1. 取 $a=-1$，则 $\delta(-t)=\delta(t)$，即 $\delta(t)$为偶函数

2. $\delta(at+b)=\dfrac{1}{|a|}\delta\left(t+\dfrac{b}{a}\right)$

具有 $\delta(at+b)$ 形式的冲激信号，必须利用展缩特性的推论2化成标准型之后，才能使用取样特性和筛选特性。

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

卷积定义： $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

- 卷积特性： $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

证明： $f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\mathrm{d}\tau$

偶函数

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))\mathrm{d}\tau$$

取样特性

$$=f(t-t_0)$$

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

阶跃信号的导数：

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}=u(t)$$

信号在间断点处的导数为 (延时) 冲激信号，其强度为间断点的跳跃值。

2.1-6 单位冲激信号（奇异）

【例】利用冲激信号的性质计算：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t)\delta(t-\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=\sin(\frac{\pi}{2})=1$

取样特性

(2) $\int_{-4}^{6}e^{-2t}\delta(t+8)\mathrm{d}t=0$

冲激信号定义

(3) $\int_{-1}^{2}t^2\delta(2-2t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{2}t^2\delta(2t-2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}t^2\delta(t-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

(4) $t^3\delta(t-2)=8\delta(t-2)$

筛选特性

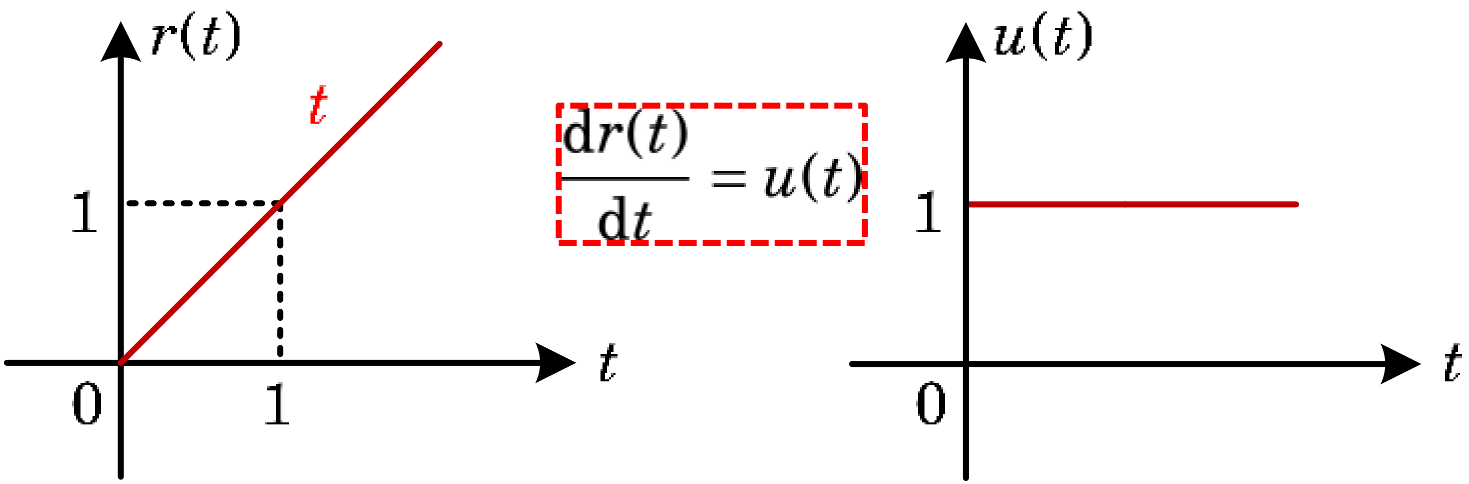
展缩特性

(5) $e^{-4t}\delta(2+2t)=\frac{1}{2}e^{-4t}\delta(t+1)=\frac{1}{2}e^{4}\delta(t+1)$

2.1-7 斜坡信号（奇异）

- 定义：$r(t)=\begin{cases} t, & t \geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $\qquad r(t)=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$r(t)=tu(t) \qquad r(t-t_0)=(t-t_0)u(t-t_0)$$



$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)}$$

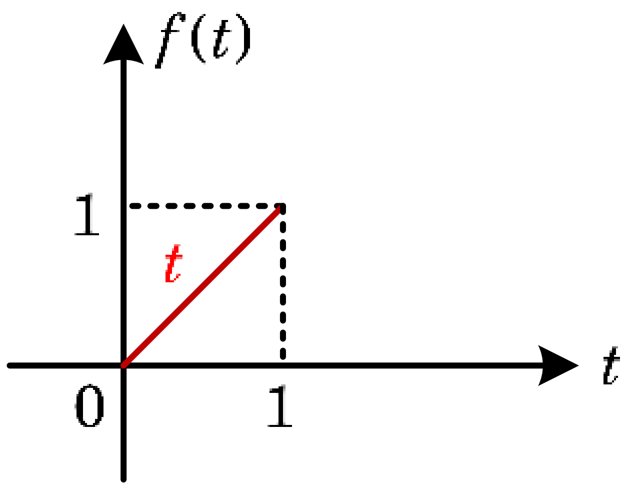
斜坡信号 阶跃信号

斜坡信号+阶跃信号可以表示任意三角信号！

2.1-7 斜坡信号（奇异）

- 定义：$r(t)=\begin{cases} t, & t\geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=u(t) \qquad r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$

斜坡信号+阶跃信号可以表示任意三角信号！



分段式：$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & 0\leqslant t<1 \\ 0, & t\geqslant 1 \end{cases}$

表达式：从左到右，逐点观察

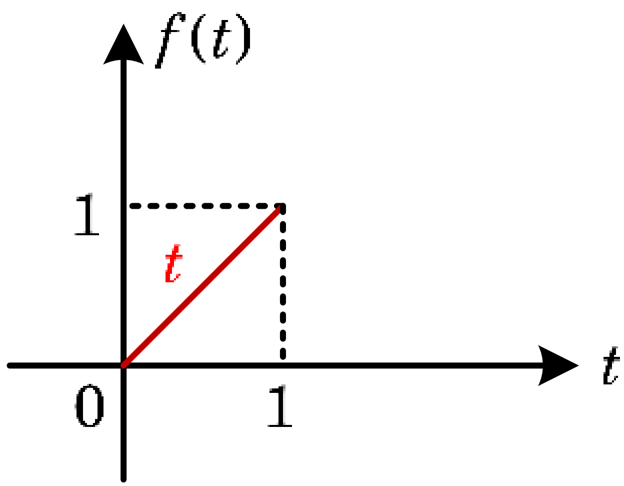
$$t \quad - \quad (t-1) \quad - \quad 1$$

$$f(t)=r(t)-r(t-1)-u(t-1)$$

2.1-7 斜坡信号（奇异）

- 定义： $r(t)=\begin{cases} t, & t\geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)$ $\qquad r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$

斜坡信号+阶跃信号可以表示任意三角信号！



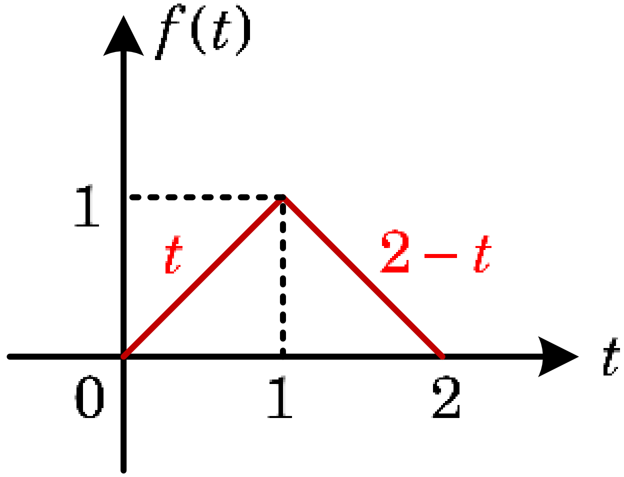
方法二：阶跃信号的截断特性

$$\begin{aligned} f(t) &= t[u(t)-u(t-1)] \\ &= tu(t)-tu(t-1) \\ &= tu(t)-(t-1)u(t-1)-u(t-1) \\ &= r(t)-r(t-1)-u(t-1) \end{aligned}$$

2.1-7 斜坡信号（奇异）

□ 定义：$r(t)=\begin{cases} t, & t\geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=u(t) \qquad r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$

斜坡信号+阶跃信号可以表示任意三角信号！



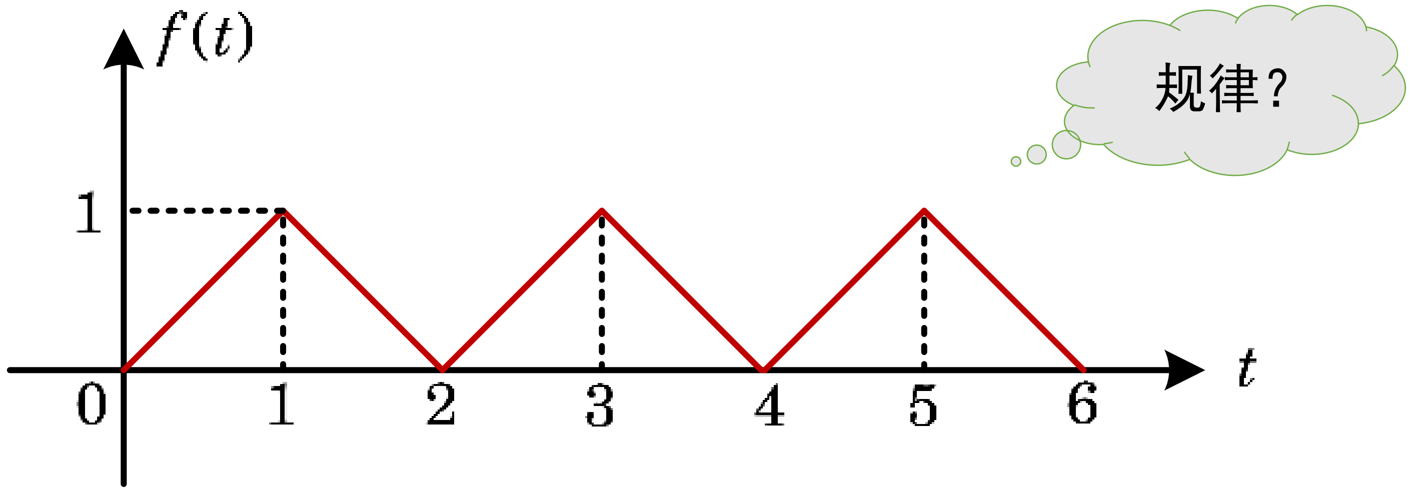
练习

$$f(t)=r(t)-r(t-1)-u(t-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&+(2-t)[u(t-1)-u(t-2)]\\&=(t-2)[u(t-2)-u(t-1)]\\&=r(t-2)-r(t-1)+u(t-1)\end{aligned}}$$

$$=r(t)-2r(t-1)+r(t-2)$$

2.1-7 斜坡信号（奇异）

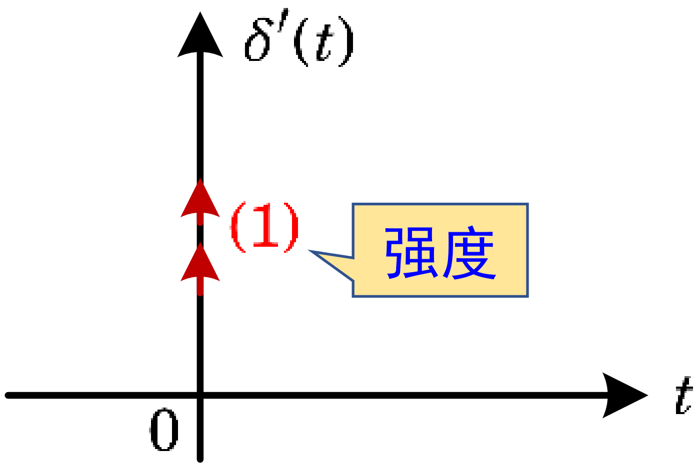


$$f(t)= \underline{r(t)+r(t-2)-2r(t-1)+}$$
$$\underline{r(t-2)+r(t-4)-2r(t-3)+}$$
$$\underline{r(t-4)+r(t-6)-2r(t-5)}$$

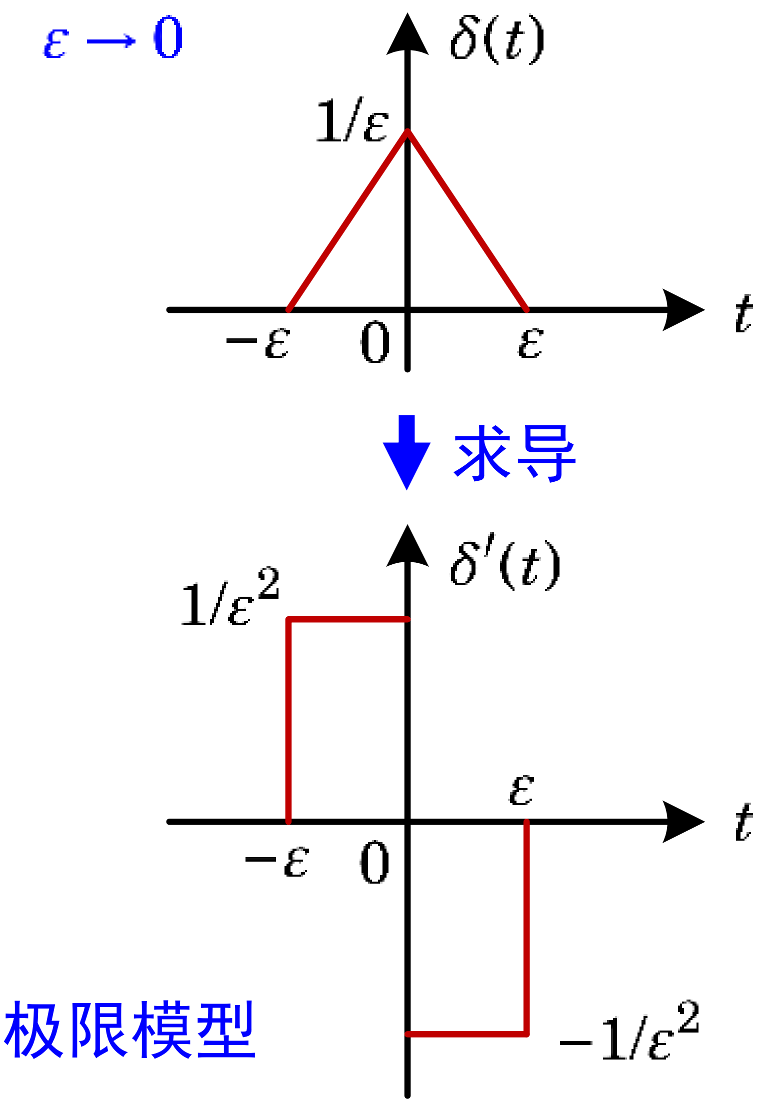
$$=r(t)-2r(t-1)+2r(t-2)-2r(t-3)+2r(t-4)-2r(t-5)+r(t-6)$$

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

□ 定义：$\delta'(t)=\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$

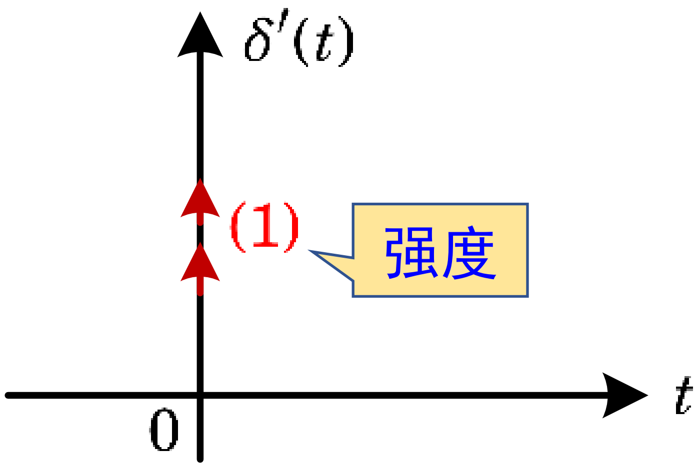


冲激偶信号



2.1-8 冲激偶信号（奇异）

- 定义：$\delta'(t)=\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$



冲激偶信号

冲激偶信号的性质：

1. 取样特性
2. 筛选特性
3. 展缩特性
4. 卷积特性
5. 冲激信号的导数

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

- 取样特性：$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

证明：左式 $$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}(\delta(t-t_0))$$

$$= [f(t)\delta(t-t_0)]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}$$

$$= -f'(t_0)$$

冲激信号的取样特性

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

- 筛选特性： $f(t)\delta'(t-t_0)=-f'(t_0)\delta(t-t_0)+f(t_0)\delta'(t-t_0)$

证明：左式 $=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-f'(t_0)$ 取样

右式 $=\int_{-\infty}^{\infty} -f'(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t$

取样

$=-f'(t_0)$

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

- 展缩特性： $\delta'(at-b)=\dfrac{1}{a|a|}\delta'\left(t-\dfrac{b}{a}\right),\ a\neq 0$
- 奇函数： $\delta'(-t)=-\delta'(t)$

证明： 左式 $=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(at-b)\mathrm{d}t$

取样

$$=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta'(\tau-b)\mathrm{d}\tau \quad = -\frac{1}{a|a|}f'\left(\frac{b}{a}\right)$$

右式 $=\dfrac{1}{a|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'\left(t-\dfrac{b}{a}\right)\mathrm{d}t$

//

取样

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

- 卷积特性： $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

证明： 根据卷积的定义

$$左式=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta'(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta'(\tau-t)\mathrm{d}\tau$$

取样

$$=-(-f'(t))$$

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

□ 冲激信号的导数： $\delta'(t)=\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$ $\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$

【例】计算： $\int_{-4}^{5}4t^2\delta'(-4t+1)\mathrm{d}t$

解：原式 $=-\int_{-4}^{5}4t^2\delta'(4t-1)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{4\times4}\int_{-4}^{5}4t^2\delta'\left(t-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t$$

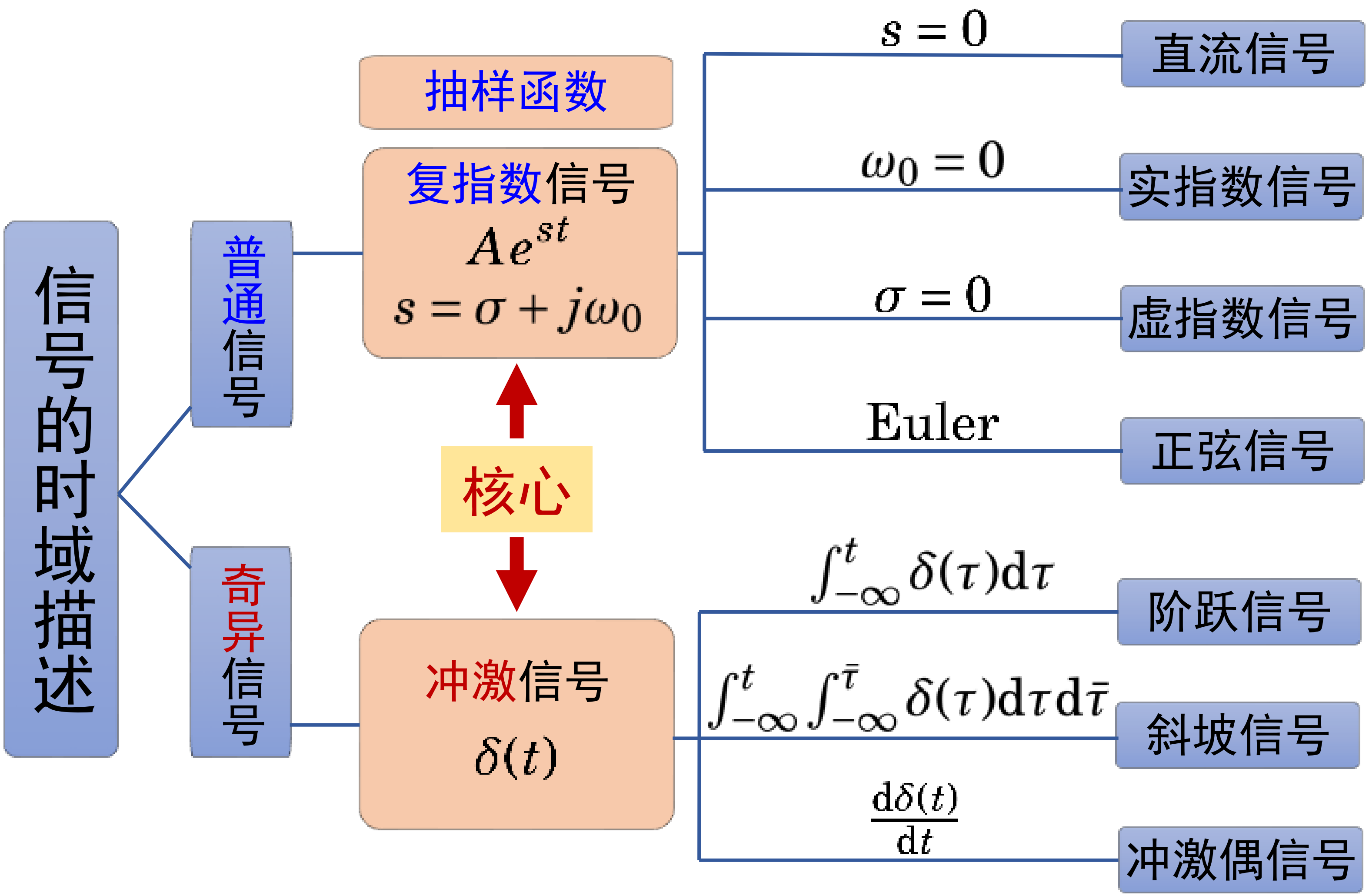
$$=-\frac{4}{4\times4}\left(-2\times\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

2.1-8 冲激偶信号（奇异）

- 冲激信号的导数： $\delta'(t)=\dfrac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$

【例】计算： $\int_{4}^{5}4t^{2}\delta'(-4t+1)\mathrm{d}t$

解： 原式 $=0$


信号的时域描述
普通信号
奇异信号
抽样函数
复指数信号
Ae^{st}
$s=\sigma+j\omega_0$
核心
冲激信号
$\delta(t)$
$s=0$
直流信号
$\omega_0=0$
实指数信号
$\sigma=0$
虚指数信号
Euler
正弦信号
$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$
阶跃信号
$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\bar{\tau}}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\bar{\tau}$
斜坡信号
$\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$
冲激偶信号

§2.2 连续时间信号的基本运算

展缩　翻转　平移

相加　相乘　微分　积分

2.2-0 信号基本运算的解释

- 自变量的变换： 展缩 翻转 平移

1. 倍速、慢速
2. 倒放
3. 通信延时

- “常规”运算： 相加 相乘 微分 积分

1. 串联、并联
2. 信号的调制（调制信号x载波信号）
3. 动态系统描述
4. 动态系统的响应

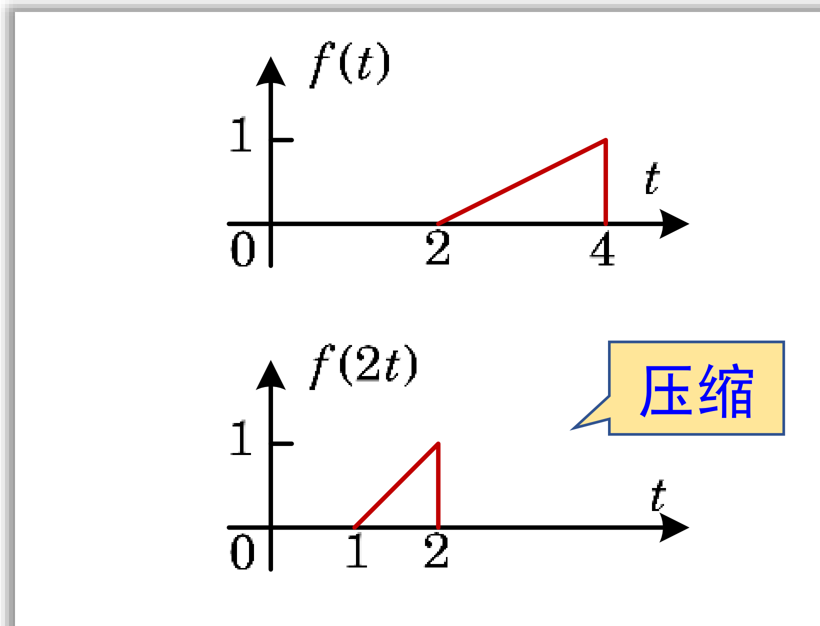
2.2-1 尺度变换（展缩）

□ 定义： $f(t) \to f(at)$ $\begin{cases} \text{以纵轴为中心扩展} & 0 < a < 1 \\ \text{以纵轴为中心压缩} & a > 1 \end{cases}$

【例】已知 $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t-2}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求 $f(2t)$ 和 $f(t/2)$

解： $f(2t) = \begin{cases} \dfrac{2t-2}{2}, & 2 \leqslant 2t \leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$= \begin{cases} t-1, & 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



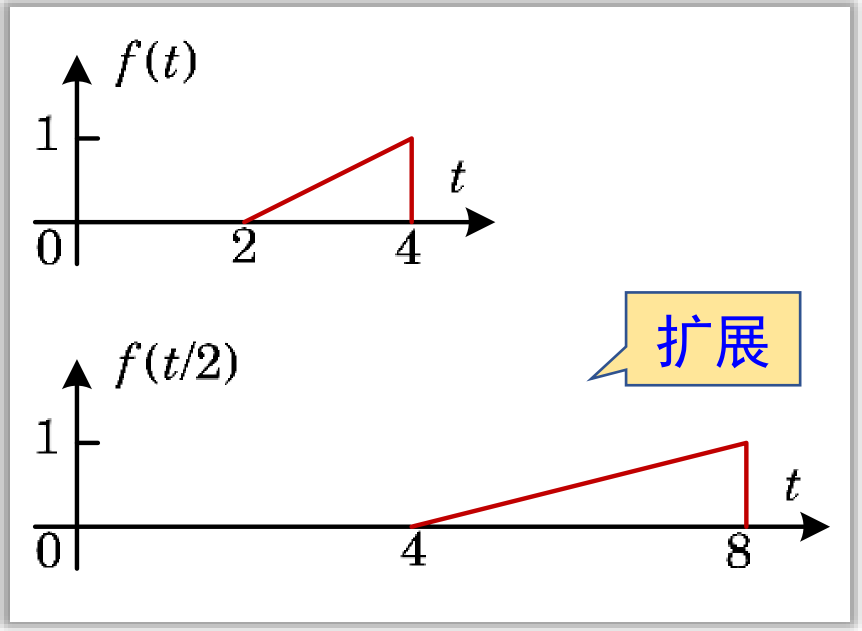
2.2-1 尺度变换（展缩）

□ 定义： $f(t) \to f(at)$ $\begin{cases} \text{以纵轴为中心扩展} & 0 < a < 1 \\ \text{以纵轴为中心压缩} & a > 1 \end{cases}$

【例】已知 $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t-2}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求 $f(2t)$ 和 $f(t/2)$

解：$f(t/2) = \begin{cases} \dfrac{t/2-2}{2}, & 2 \leqslant \frac{t}{2} \leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{t-4}{4}, & 4 \leqslant t \leqslant 8 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$



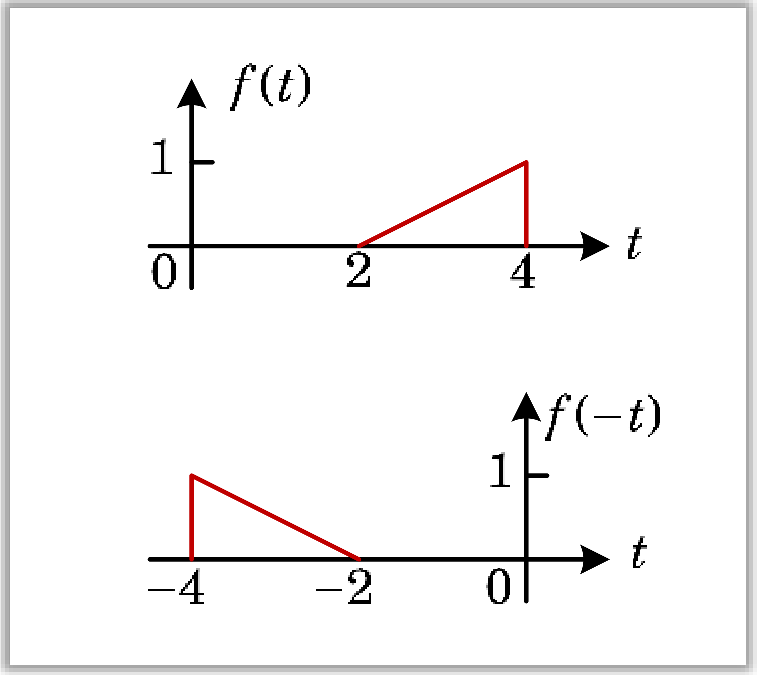
2.2-2 翻转

- 定义： $f(t) \to f(-t)$ 以纵轴为中心作180度翻转

【例】已知 $f(t)=\begin{cases} \dfrac{t-2}{2}, & 2\leqslant t\leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求 $f(-t)$

解： $f(-t)=\begin{cases} \dfrac{-t-2}{2}, & 2\leqslant -t\leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$=\begin{cases} \dfrac{-t-2}{2}, & -4\leqslant t\leqslant -2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$



2.2-3 平移（时移）

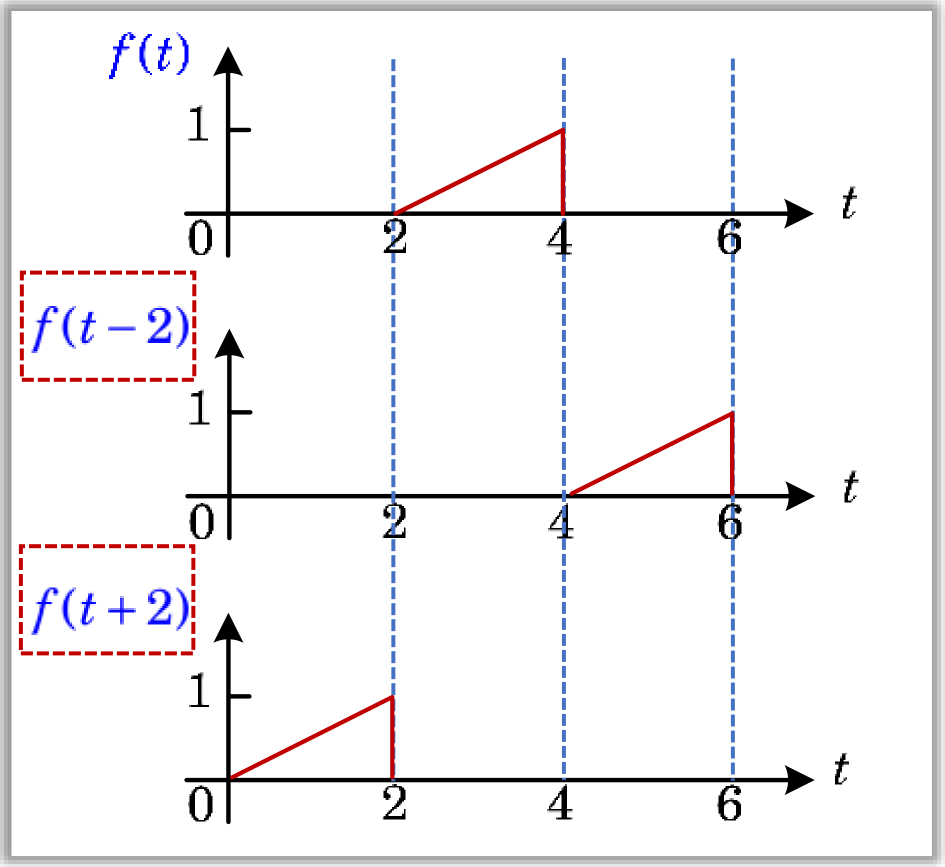
□ 定义： $f(t) \to f(t \pm t_0)$ $\begin{cases} f(t-t_0) & \text{右移} \\ f(t+t_0) & \text{左移} \end{cases}$

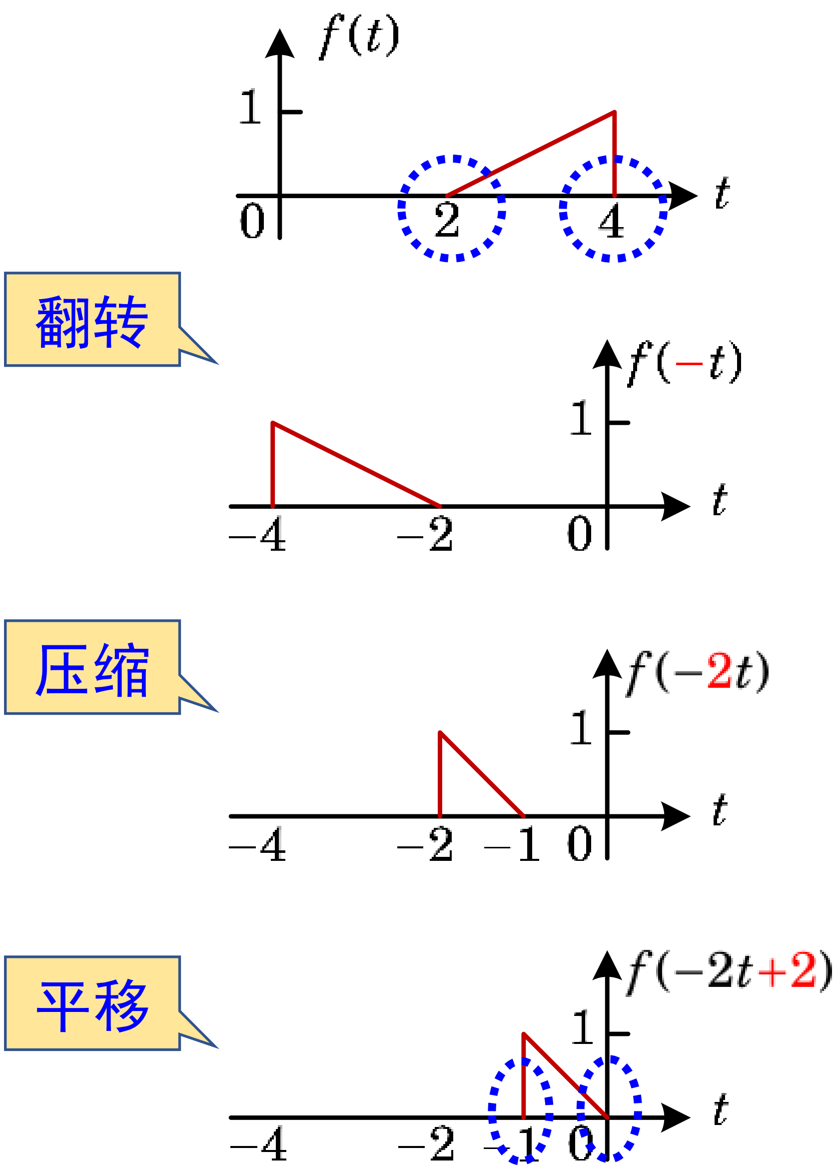
【例】已知：

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t-2}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求： $f(t-2)$

$f(t+2)$





画出：$f(t) \rightarrow f(-2t+2)$

1. 信号变化常为上述三种运算的综合
2. 变化过程中自变量改变

   信号值不变！

观察：

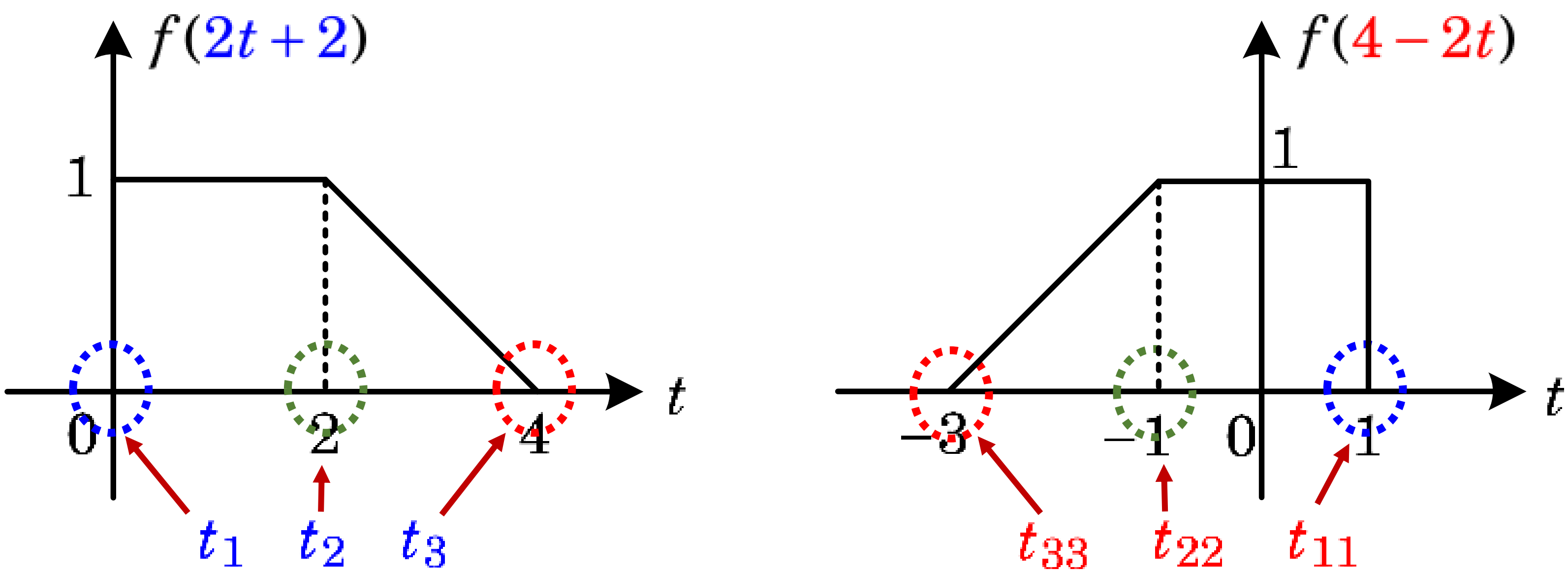
1. 端点 $t_1 = 2$，对应变换后 t_{11}

   $f(-2t_{11}+2) = f(2) \Rightarrow t_{11} = 0$

2. 端点 $t_2 = 4$，对应变换后 t_{22}

   $f(-2t_{22}+2) = f(4) \Rightarrow t_{22} = -1$

【例】已知 $f(2t+2)$ 波形如下图所示，试画出 $f(4-2t)$ 的波形



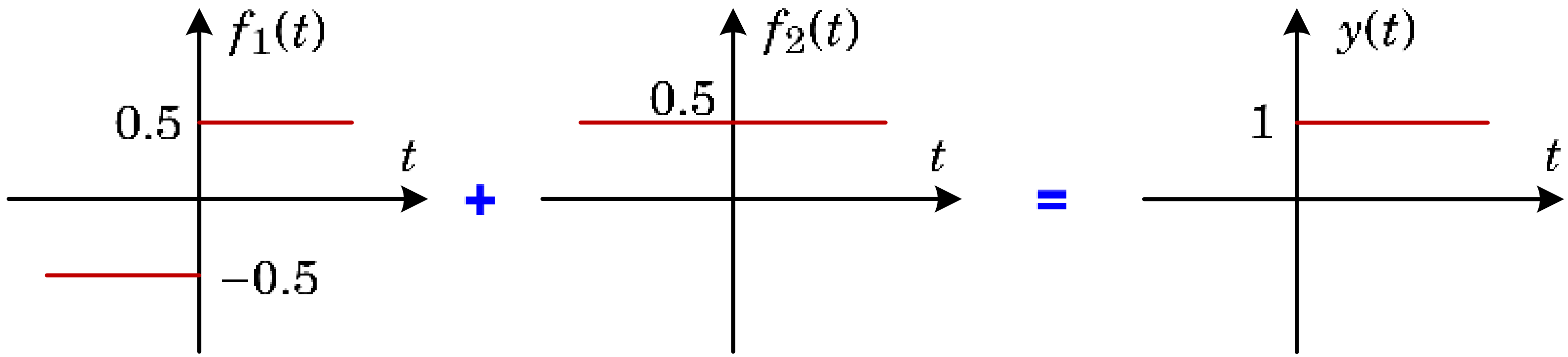
$$f(2t_1+2)=f(4-2t_{11})=1$$

$$f(2t_2+2)=f(4-2t_{22})=1$$

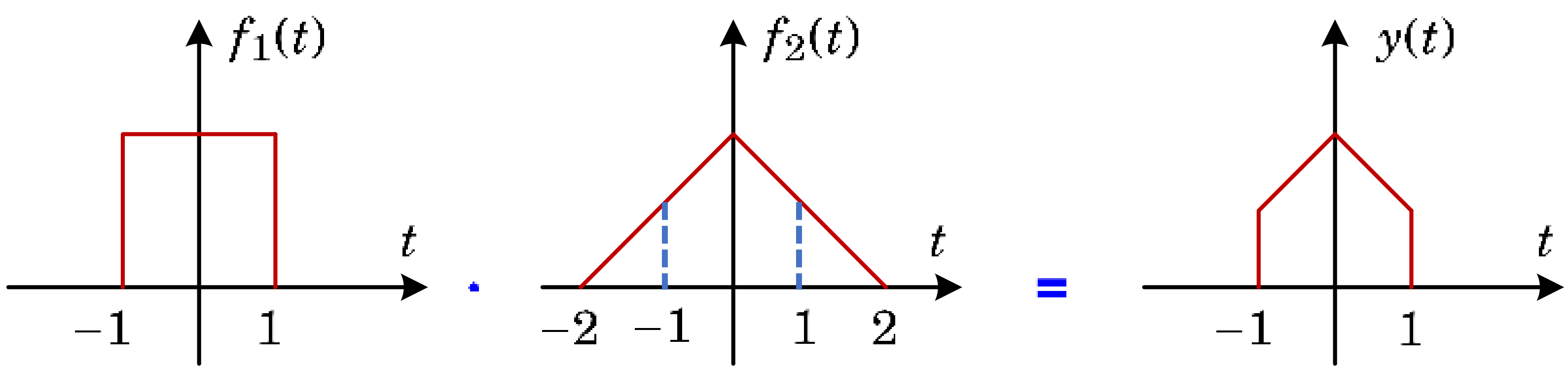
$$f(2t_3+2)=f(4-2t_{33})=0$$

2.2-4 信号的相加与相乘

- **相加：** $y(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$



- **相乘：** $y(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \cdots \cdot f_n(t)$



2.2-5 信号的微分

- 定义： $g(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=f'(t)$

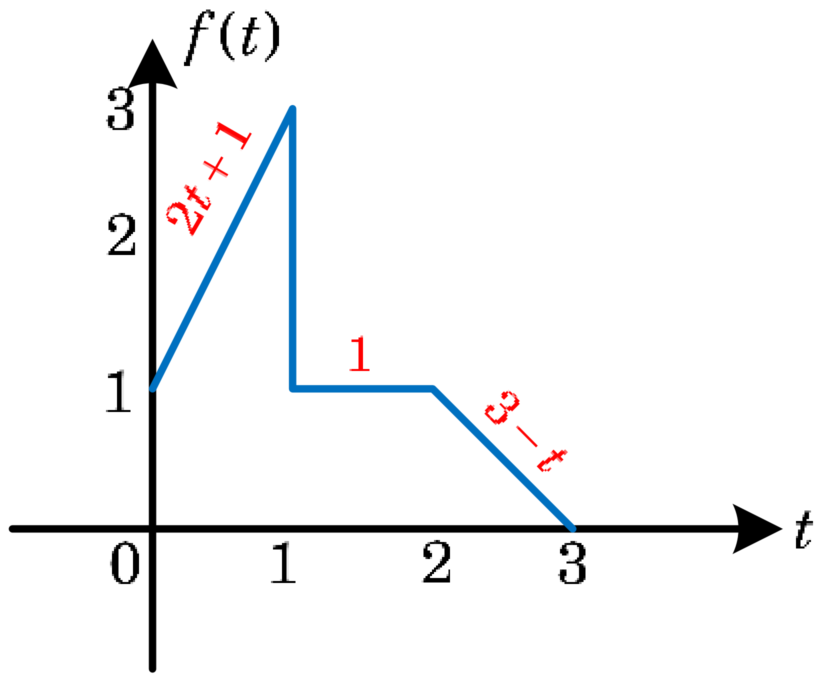
【例】已知 $f(t)=e^{-t}u(t)$，求 $f'(t),\ f''(t)$

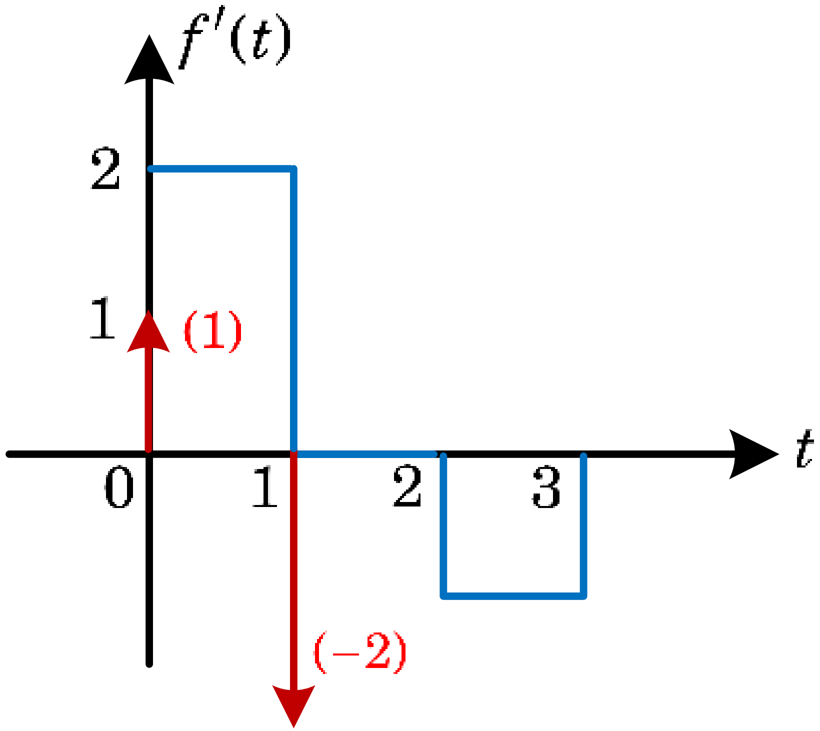
解：
$$f'(t)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)$$
$$=-e^{-t}u(t)+e^{-0}\delta(t)$$
$$=-e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

$$f''(t)=(-e^{-t}u(t)+\delta(t))'$$
$$=e^{-t}u(t)-\delta(t)+\delta'(t)$$

2.2-5 信号的微分

【例】求图中信号的导数 $f'(t)$

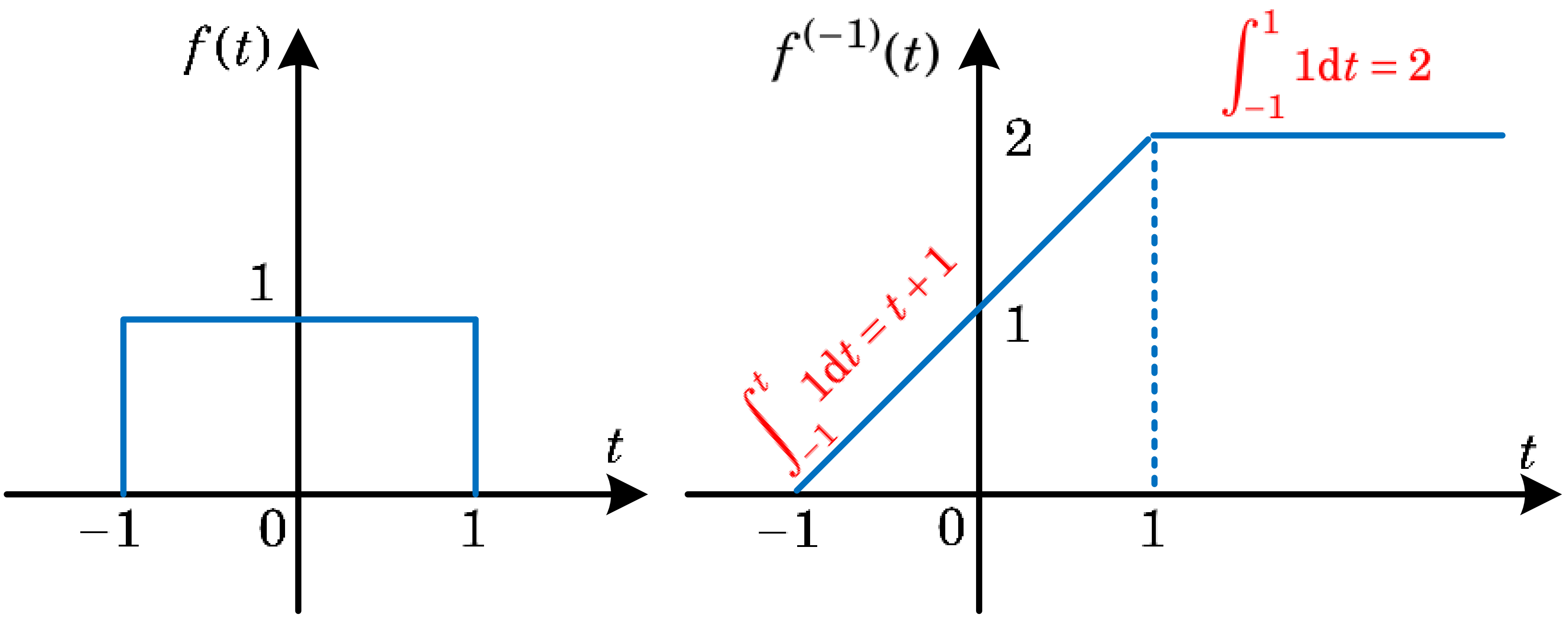




2.2-6 信号的积分

- 定义：$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$

【例】求图中信号的积分



§2.3 确定信号的时域分解

2.3-0 信号分解类型

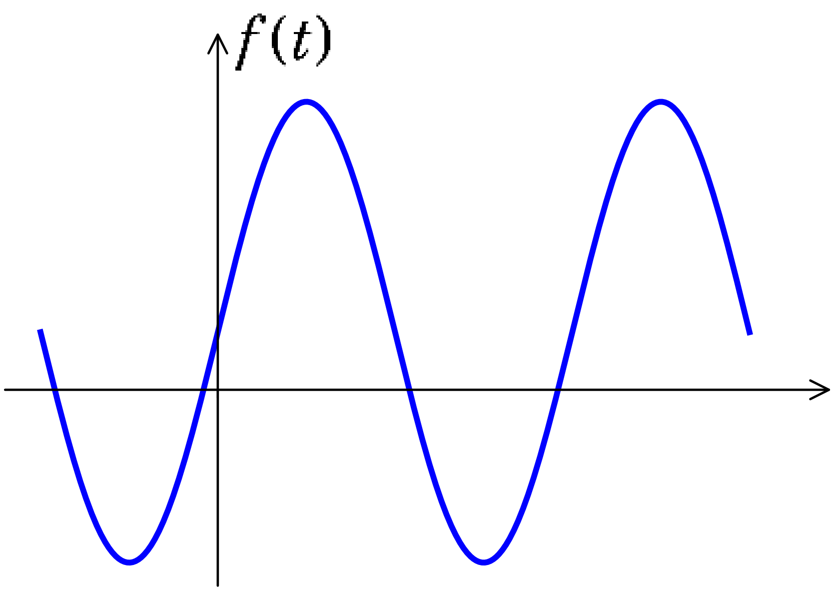
- 涵义：信号分解为基本信号的线性组合

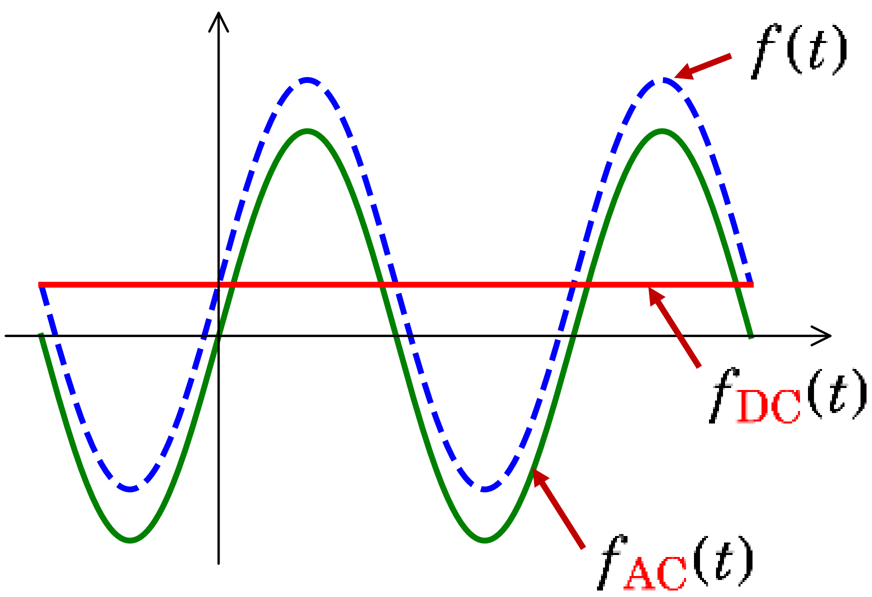
不同角度的分解		
	直流	交流
	奇分量	偶分量
	实部	虚部
	单位冲激信号的线性组合	

2.3-1 直流分量与交流分量

□ 定义： $f(t)=f_{\mathrm{DC}}(t)+f_{\mathrm{AC}}(t)$　　$f_{\mathrm{DC}}(t)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

- 直流分量：信号在定义区间上的平均值，也称稳态分量
- 交流分量：信号去除直流分量后的部分





2.3-2 奇分量与偶分量

- 定义： $f(t)=f_e(t)+f_o(t)$

$$f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$$

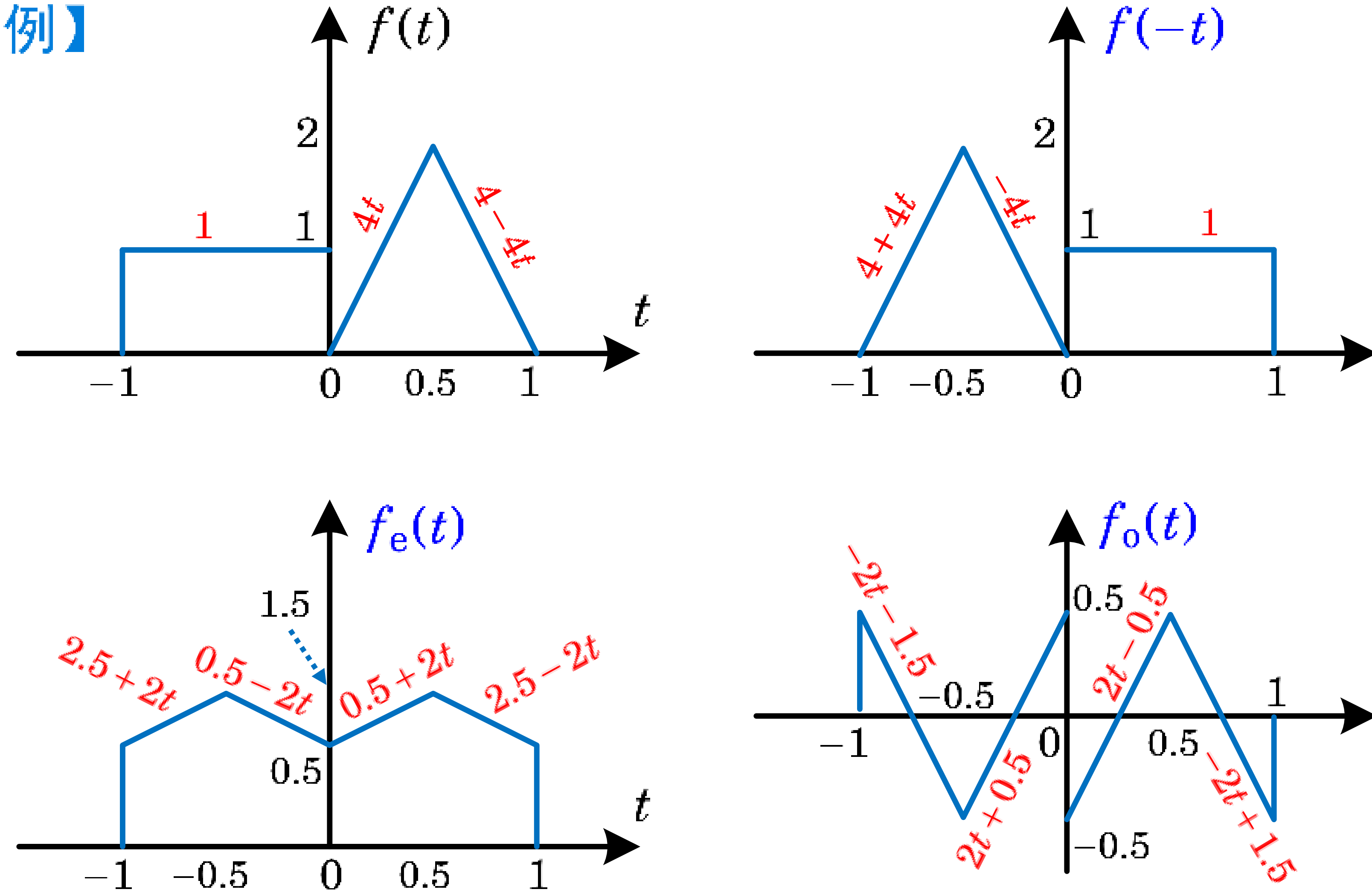
$$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$$

显然： $f_e(t)=f_e(-t)$

$$f_o(t)=-f_o(-t)$$

2.3-2 奇分量与偶分量

【例】



2.3-3 实部分量与虚部分量

- 信号分解为 $f(t)=f_{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)$

  共轭转置： $f^*(t)=f_{\mathrm{r}}(t)-\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)$

  实部： $f_{\mathrm{r}}(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f^*(t)]$

  虚部： $f_{\mathrm{i}}(t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[f(t)-f^*(t)]$

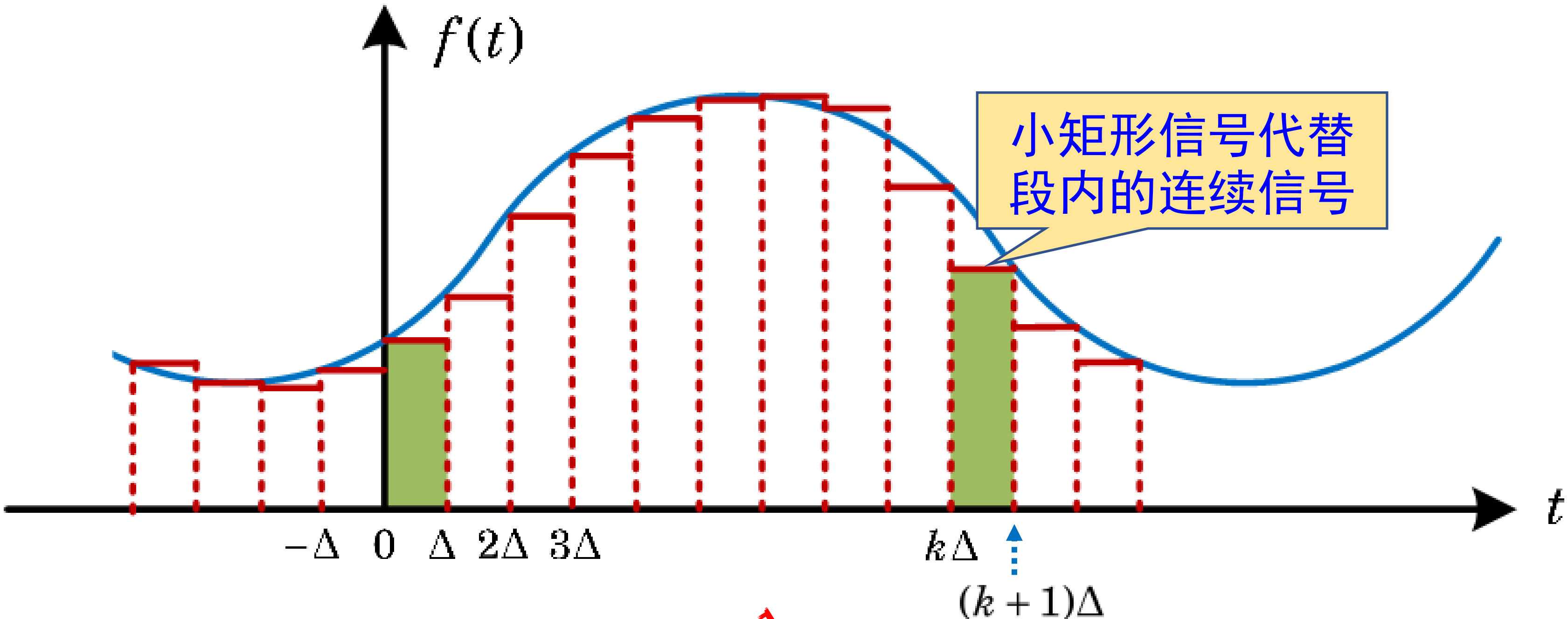
$$e^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$$

$$e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)-\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$$

$$\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t}-e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$$

2.3-4 连续信号分解为单位冲激信号的线性组合



$$f_\Delta(t) = \cdots + f(0)[u(t) - \underbrace{u(t-\Delta)]}_{}\overset{=1}{} +$$

$$\cdots + f(k\Delta)[u(t-k\Delta) - u(t-(k+1)\Delta)] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\frac{[u(t-k\Delta) - u(t-(k+1)\Delta)]}{\Delta}\Delta$$

2.3-4 连续信号分解为单位冲激信号的线性组合

$$f_\Delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\boxed{\frac{[u(t-k\Delta)-u(t-(k+1)\Delta)]}{\Delta}}\Delta$$

$\Delta\to 0\quad k\Delta\to\tau$

$\delta(t-\tau)$

$$\boxed{f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\boxed{f(t)*\delta(t)}$$

1. 不同连续信号可分解为冲激信号的加权和
2. 计算**LTI**系统的冲激响应，然后利用信号分解与**LTI**特性，可获得任意激励信号系统响应
3. 任意信号分解为冲激信号的线性组合
是**LTI**系统时域分析的基础

本章小结

- 常见的连续时间信号
- 信号的基本运算
- 信号的时域分解*
- 学习要求：
  1. 掌握常见的描述及其特征与性质；深刻理解复指数信号和冲激信号的地位和纽带作用
  2. 熟练掌握信号的七种基本运算：涵义、计算方法
  3. 了解信号的三种时域分解；深刻体会确定信号的时域表示：**冲激信号的线性组合**

附：第2次作业

◆ 第57-59页：

2-1：(3)，(5)

2-5：(a)，(c)——不能写成分段函数，要用基本信号的组合进行表示

2-6：(1)，(5)

2-7：(3)，(4)——计算有过程，不能只写最后答案

2-8：(1)，(3)——计算有过程，不能只写最后答案

2-9：(2)，(5)

2-11