第3章 系统的时域分析

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | https://sslic.cn/ss

本章主要内容

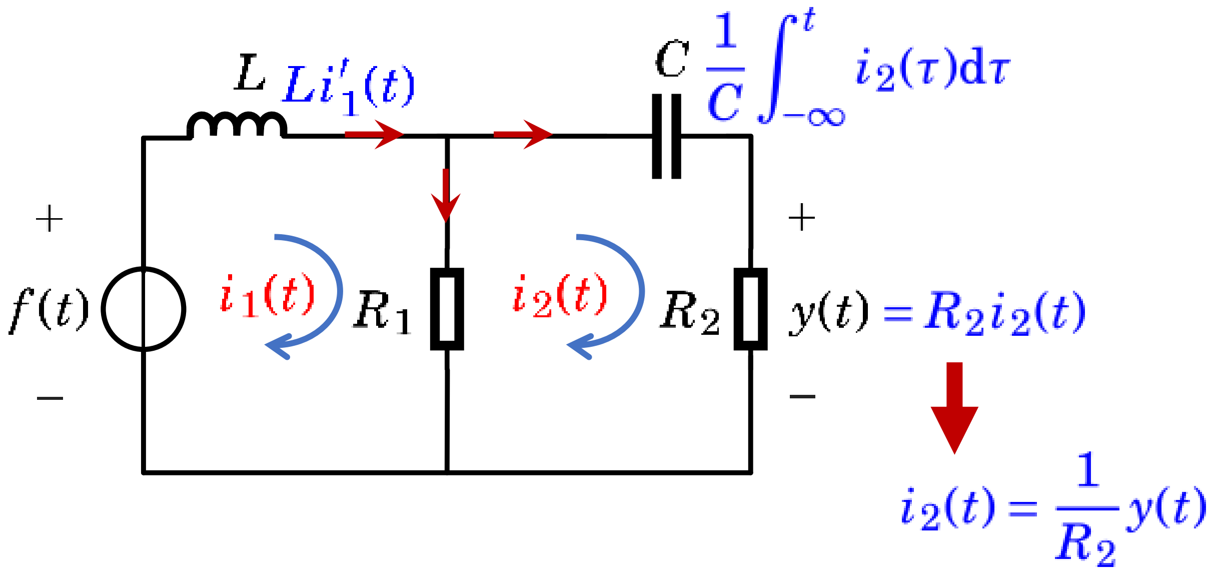
- LTI系统的描述及特点
- 连续时间LTI系统的响应
- 连续时间系统的冲激响应
- 卷积积分
- 冲激响应表示的系统特性

§3.1 LTI系统的描述及特点

1. 建立数学模型
2. 分析信号通过**LTI**系统的响应

3.1-1 数学描述

求**RLC**电路中电阻 R_2 两端电压 $y(t)$ 与输入电压源 $f(t)$ 的关系

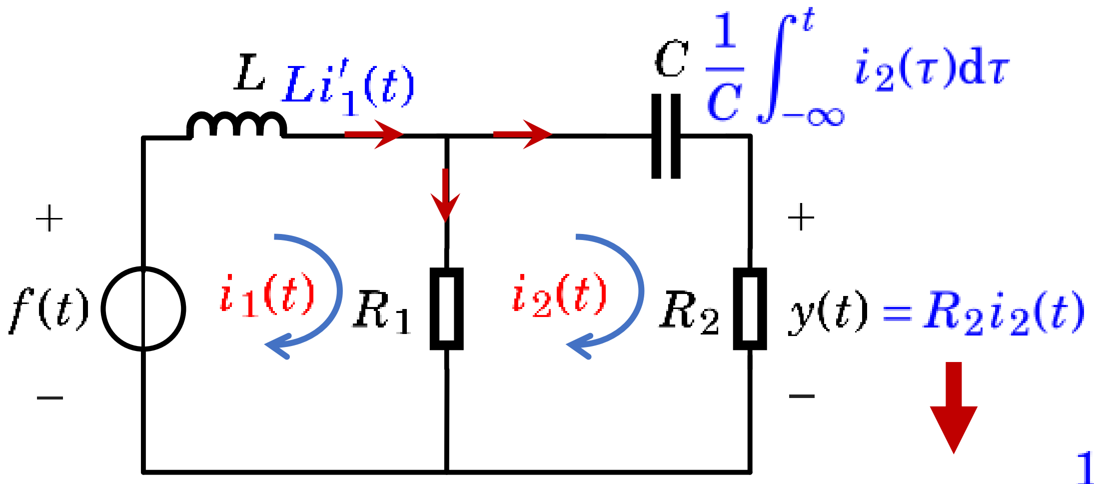


$$Li_1'(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t)=f(t)$$

$$R_1(i_1(t)-i_2(t))=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t)$$

3.1-1 数学描述

求**RLC**电路中电阻 R_2 两端电压 $y(t)$ 与输入电压源 $f(t)$ 的关系



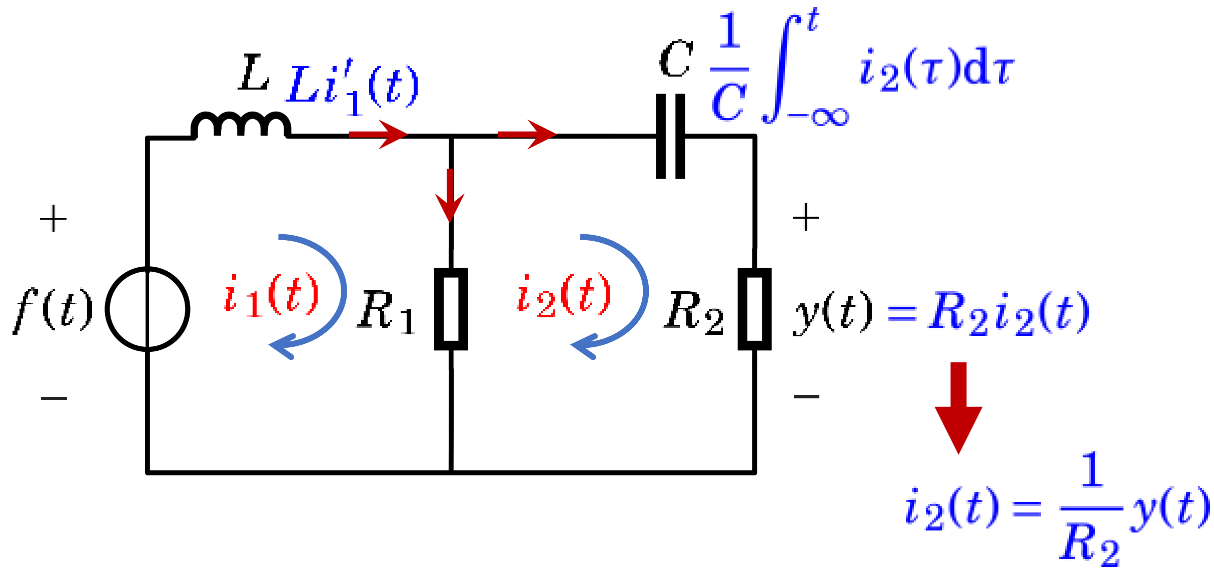
$$i_2(t)=\frac{1}{R_2}y(t)$$

$$Li_1'(t)+\frac{1}{R_2C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t)=f(t)$$

$$R_1 i_1(t)-\frac{R_1}{R_2}y(t)=\frac{1}{R_2C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t)$$

3.1-1 数学描述

求**RLC**电路中电阻 R_2 两端电压 $y(t)$ 与输入电压源 $f(t)$ 的关系

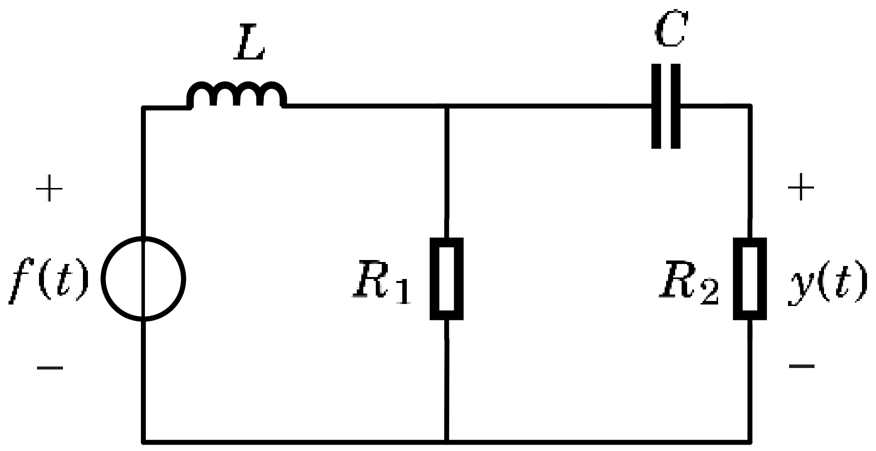


$$Li_1'(t) + \frac{1}{R_2C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau + y(t) = f(t)$$

$$Li_1'(t) - \frac{L}{R_2}y'(t) = \frac{L}{R_1R_2C}y(t) + \frac{L}{R_1}y'(t)$$

3.1-1 数学描述

求**RLC**电路中电阻 R_2 两端电压 $y(t)$ 与输入电压源 $f(t)$ 的关系

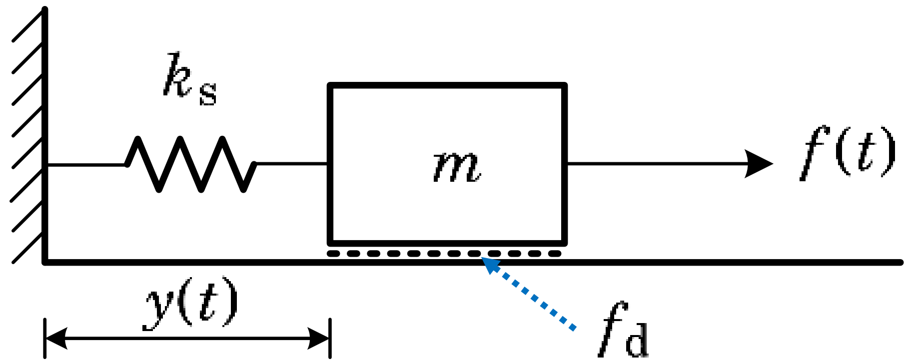


$$L\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)y''(t)+\left(\frac{L}{R_1R_2C}+1\right)y'(t)+\frac{1}{R_2C}y(t)=f'(t)$$

二阶线性微分方程

3.1-1 数学描述

确定如图力学系统中物体位移 $y(t)$与外力输入$f(t)$的关系



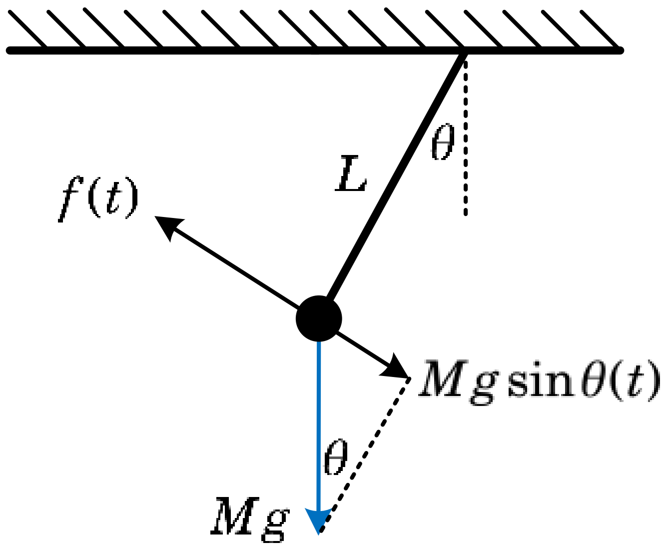
$$f_i(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \qquad f_f(t) = f_d\frac{dy(t)}{dt} \qquad f_k(t) = k_s y(t)$$

$$my''(t) + f_d y'(t) + k_s y(t) = f(t)$$

二阶线性微分方程

3.1-1 数学描述

建立如下单摆系统输出$y(t)=\theta(t)$与输入 $f(t)$ 的关系



$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=L[f(t)-MgL\sin\theta(t)]$$

$$Iy''(t)+MgL\sin y(t)=Lf(t)$$

小信号 $\sin\theta(t)\approx\theta(t)$

$$Iy''(t)+MgLy(t)=Lf(t)$$

二阶线性微分方程

3.1-1 数学描述

结论：

1. 不同的物理系统，相同的输入输出关系形式
2. n 阶线性连续系统，n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 f'(t)+a_0 y(t)$$

$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f'(t)+b_0 f(t)$$

3.1-2 LTI系统的描述

LTI系统：数学模型为线性常系数微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 f'(t)+a_0 y(t)$$
$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f'(t)+b_0 f(t)$$

线性**ODE**：不存在耦合项或者非线性项——线性系统

常系数：系统参数不随时间改变——时不变系统

3.1-2 LTI系统的描述

例 判断 $y'(t)+a(t)y(t)=bf(t)$ 是否为时不变系统

解： 设激励 $s(t)$ 作用下的系统响应为 $r(t)$

则 $r'(t)+a(t)r(t)=bs(t)$

$$\Updownarrow$$

$$r'(t-t_0)+a(t-t_0)r(t-t_0)=bs(t-t_0)$$

而 $s(t-t_0)$ 通过系统的响应 $\beta(t)$ 满足

$$\beta'(t)+a(t)\beta(t)=bs(t-t_0)$$

仅当 $a(t)\equiv a(t-t_0)$ 时，$\beta(t)=r(t-t_0)$

3.1-3 LTI系统的特性

主要特性：线性 | 时不变 | 微分 | 积分

- 微分特性：$T\{f(t)\}=y(t) \implies T\{f'(t)\}=y'(t)$
- 积分特性：$T\{f(t)\}=y(t) \implies T\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau$

证明：

$$T\{f'(t)\}=T\left\{\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(t+\Delta)-f(t)}{\Delta}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{T\{f(t+\Delta)\}-T\{f(t)\}}{\Delta}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{y(t+\Delta)-y(t)}{\Delta}=y'(t)$$

积分定义展开可类似证明积分特性

例 判断下列系统是否为线性、时不变系统？

(1) $y'(t)+ty(t)=f(t)$ 线性、时变

(2) $y'(t)+y(t)=f(t)+1$ 非线性、时不变

(3) $y'(t)+y(t)=f^2(t)$ 非线性、时不变

§3.2 连续时间LTI系统的响应

1. 解常微分方程的经典法
2. 零输入响应与零状态响应
   a. 零输入响应：解齐次方程
   b. 零状态响应：冲激响应+卷积积分

3.2-1 经典时域分析方法

- 系统输出响应 $y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)$

- 齐次解

$$y(t)=Ke^{st}$$

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1f'(t)+a_0y(t)=0$$

$$Ks^ne^{st}+Ka_{n-1}s^{n-1}e^{st}+\cdots+Ka_1se^{st}+a_0Ke^{st}=0$$

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

特征方程

- 互异实根 $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$ $\qquad y_{\mathrm{h}}(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+\cdots+K_ne^{s_nt}$
- 重实根 $\qquad y_{\mathrm{h}}(t)=K_1e^{st}+K_2te^{st}+\cdots+K_nt^{n-1}e^{st}$
- 共轭复根 $s_1=\sigma_1\pm\mathrm{j}\omega_1$ $\qquad y_{\mathrm{h}}(t)=e^{\sigma_1t}[K_1\cos(\omega_1t)+K_2\sin(\omega_1t)]+\cdots$

3.2-1 经典时域分析方法

特解

输入信号	特解表示式
K	A
Kt	$A+Bt$
$Ke^{-at}\ (s\neq -a)$	Ae^{-at}
$Ke^{-at}\ (s=-a)$	Ate^{-at}
$K\sin(\omega_0 t)$ 或 $K\cos(\omega_0 t)$	$A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)$
$Ke^{-at}\sin(\omega_0 t)$ 或 $Ke^{-at}\cos(\omega_0 t)$	$Ae^{-at}\sin(\omega_0 t)+Be^{-at}\cos(\omega_0 t)$

计算待定系数

- 利用特解表示式代入原方程求特解系数
- 利用初始条件 $y(0^+),\ y'(0^+),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0^+)$ 求齐次解系数

3.2-1 经典时域分析方法

例 已知 $y(0^+)=1,\ y'(0^+)=2,\ f(t)=e^{-t}u(t)$，求$\boxed{\text{系统完全响应}}$

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f(t),\ t>0$$

解： 齐次解 $y_h(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-4t}$

特解表示式 $y_p(t)=Ae^{-t}$ $\boxed{A=\frac{1}{3}}$

完全响应 $y(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}$

$$y(0^+)=1 \qquad K_1=\frac{5}{2}$$

$$y'(0^+)=2 \qquad K_2=-\frac{11}{6}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{11}{6}e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t},\quad t\geqslant 0}$$

3.2-1 经典时域分析方法

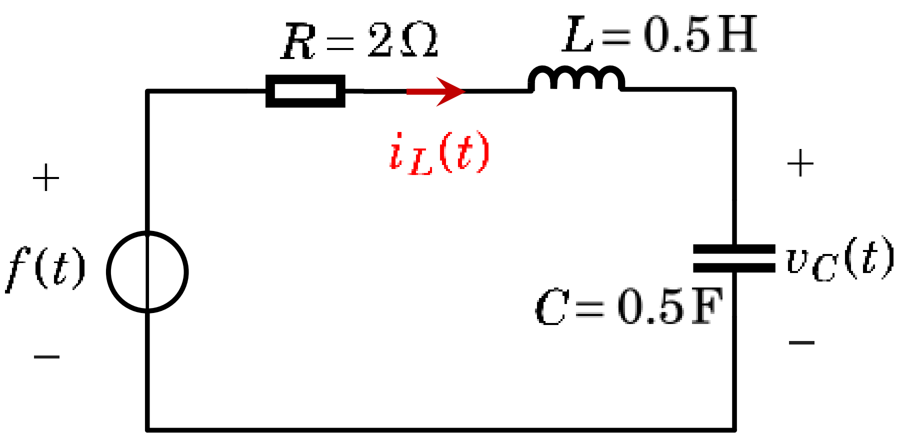
经典方法小结：

- 全解 = 齐次解 + 特解
- 齐次解仅依赖于系统本身特征，与激励无关（固有响应）
- 特解的形式由激励信号确定（强迫响应）
- 系统响应也可分为暂态响应与稳态响应
  - 暂态：完全响应中快速收敛到零的部分，过渡过程
  - 稳态：完全响应中不随时间增加而衰减的部分
- 经典分析方法存在局限性
  - 激励信号复杂时，难以确定特解形式
  - 激励信号变化时，系统响应需全部重新求解（包括特解和齐次解所有系数）
  - 初始条件变化时，系统响应需全部重新求解（包括齐次解所有系数）
  - 纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念

3.2-2 连续LTI系统的零输入响应

- 定义：输入为零，初始状态单独作用于系统产生的响应，$y_x(t)$
- 求解：与计算微分方程齐次解过程一致，唯一区别为初始状态的含义不同

$$y(0^-),\ y'(0^-),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0^-)$$



$$v_C''(t)+4v_C'(t)+4v_C(t)=4f(t)$$

$$v_C(t)=(K_1+K_2t)e^{-2t},\quad t\geqslant 0^-$$

$$v_C(0^-)=1\mathrm{V}\qquad i_L(0^-)=1\mathrm{A}$$

$$v_C'(0^-)=\frac{1}{C}i_L(0^-)=2\mathrm{V/s}$$

$$v_C(t)=(1+4t)e^{-2t},\quad t\geqslant 0^-$$

3.2-2 连续LTI系统的零状态响应

- 定义：初始状态为零，外部激励作用于系统产生的响应，$y_f(t)$

- 求解：卷积法

  - 将任意信号 $f(t)$ 分解为单位冲激信号的线性组合
  - 计算单位冲激信号作用于系统的零状态响应 $h(t) = T\{\delta(t)\}$
  - 利用LTI系统的特性，求得 $y_f(t)$

冲激响应

连续LTI系统的零状态响应

$$y_f(t) = f(t) * h(t)$$

3.2-2 连续LTI系统的零状态响应

□ 推导过程：

1. 分解 $$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta$$

2. 时不变 $$T\{\delta(t)\}=h(t) \implies T\{\delta(t-k\Delta)\}=h(t-k\Delta)$$

3. 线性 $$T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\Delta\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)h(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Downarrow\ \Delta\to 0$$

4. 极限 $$T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=T\{f(t)\}$$

$$\Downarrow$$

5. 卷积 $$\boxed{y_f(t)=f(t)*h(t)}$$

§3.3 连续系统的冲激响应

1. 零初始状态
2. 单位冲激信号激励系统
3. 仅取决于系统内部结构及其元件参数
   ——系统的描述
4. 是求解零状态响应的基础

3.3-1 连续系统的冲激响应

□ 冲激响应：

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{连续时间LTI系统}\\ \text{（零初始状态）}\end{array}} \rightarrow h(t)$$

$$\begin{cases} h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t) \\ =b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t) \\ h^{(i)}(0^-)=0,\quad i=0,1,n-1 \end{cases}$$

$=0$，若 $t \geqslant 0^+$

□ 齐次方程求解：$n > m$

- 互异实根 $s_1, s_2, \dots, s_n$　　$h(t)=(K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+\cdots+K_ne^{s_nt})\boxed{u(t)}$
- 重实根　　$h(t)=(K_1e^{st}+K_2te^{st}+\cdots+K_nt^{n-1}e^{st})\boxed{u(t)}$
- 共轭复根 $s_1=\sigma_1\pm j\omega_1$　　$h(t)=(e^{\sigma_1t}[K_1\cos(\omega_1t)+K_2\sin(\omega_1t)]+\cdots)\boxed{u(t)}$

3.3-1 连续系统的冲激响应

- **冲激响应：**

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{连续时间LTI系统（零初始状态）}} \longrightarrow h(t)$$

$$\begin{cases} h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t) \\ =b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t) \\ h^{(i)}(0^-)=0,\quad i=0,1,n-1 \end{cases}$$

$=0$，若 $t \geqslant 0^+$

- 齐次方程求解：$n \leqslant m$

  - 互异实根 $h(t)=(K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+\cdots+K_ne^{s_nt})\cdot u(t)+\boxed{S_1\delta(t)+S_2\delta'(t)+\cdots}$
  - 重实根 $h(t)=(K_1e^{st}+K_2te^{st}+\cdots+K_nt^{n-1}e^{st})\cdot u(t)+\boxed{S_1\delta(t)+S_2\delta'(t)+\cdots}$
  - 共轭复根 $h(t)=(e^{\sigma_1t}[K_1\cos(\omega_1t)+K_2\sin(\omega_1t)]+\cdots)\cdot u(t)$
    $+\boxed{S_1\delta(t)+S_2\delta'(t)+\cdots}$

3.3-1 连续系统的冲激响应

例 求系统 $y'(t)+3y(t)=2f(t),\ t\geqslant 0$ 的冲激响应 $h(t)$

解： $h'(t)+3h(t)=2\delta(t)$ $\quad s=-3 \quad n=1,\ m=0$

$$h(t)=Ke^{-3t}u(t)$$

$$h'(t)=-3Ke^{-3t}u(t)+Ke^{-3t}\delta(t)$$

$$=-3Ke^{-3t}u(t)+K\delta(t)$$

$$h'(t)+3h(t)=K\delta(t)=2\delta(t) \qquad K=2$$

冲激平衡法

$$\boxed{h(t)=2e^{-3t}u(t)}$$

3.3-1 连续系统的冲激响应

例 求系统 $y'(t)+6y(t)=2f(t)+3f'(t),\ t\geqslant 0$ 的冲激响应 $h(t)$

解： $h'(t)+6h(t)=2\delta(t)+3\delta'(t)$ $\quad s=-6 \quad n=1,\ m=1$

$$h(t)=K_1e^{-6t}u(t)+K_2\delta(t)$$

$$h'(t)=-6K_1e^{-6t}u(t)+K_1e^{-6t}\delta(t)+K_2\delta'(t)$$
$$=-6K_1e^{-6t}u(t)+K_1\delta(t)+K_2\delta'(t)$$

$$h'(t)+6h(t)=K_1\delta(t)+K_2\delta'(t)+6K_2\delta(t)$$
$$=2\delta(t)+3\delta'(t) \qquad K_1=-16,\ K_2=3$$

$$\boxed{h(t)=-16e^{-6t}u(t)+3\delta(t)}$$

§3.4 卷积积分

$$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

图解法

解析法

3.4-1 卷积的计算——图解法

- 卷积： $y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

- 图解法步骤：

① 替换 $f(t),\ h(t)\ \rightarrow\ f(\tau),\ h(\tau)$

② 翻转 $h(\tau)\ \rightarrow\ h(-\tau)$

③ 平移 $h(-\tau)\ \rightarrow\ h(t-\tau)=h(-(\tau-t))$

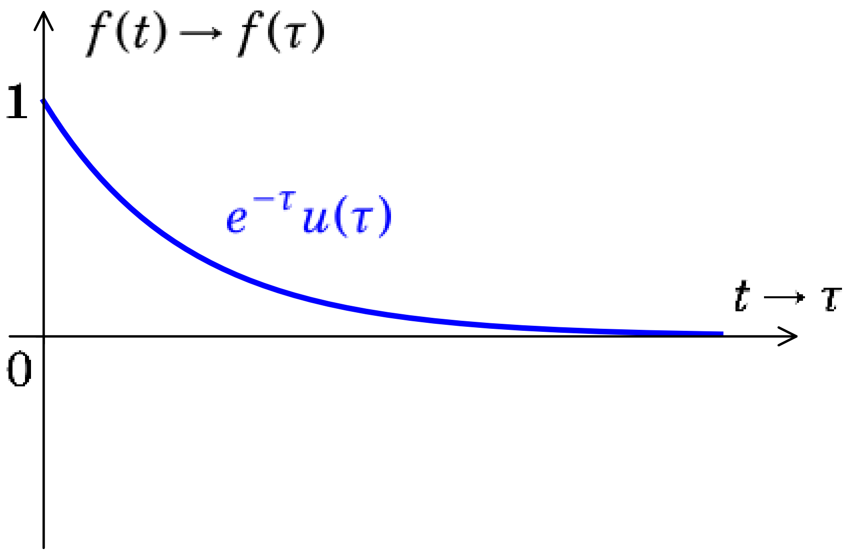
$t>0$ 右移，$t<0$ 左移

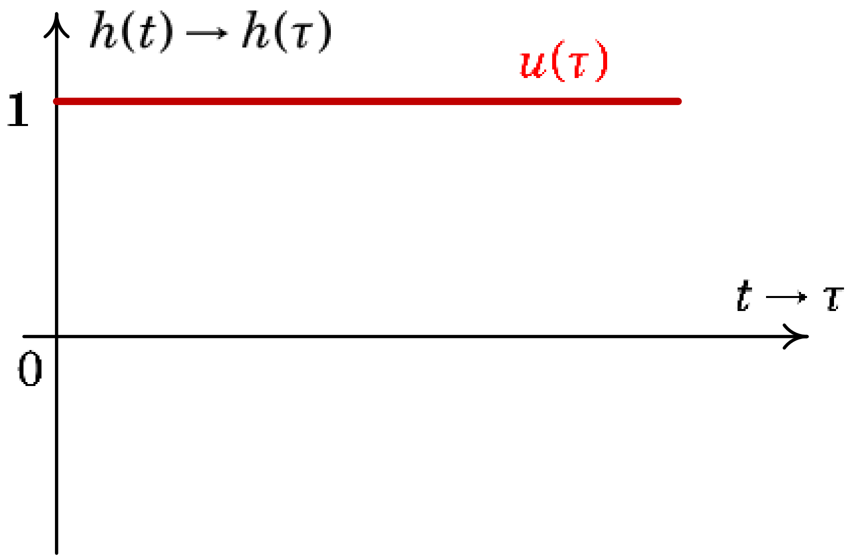
④ 结合图讨论 t 的范围，计算乘积 $f(\tau)h(t-\tau)$

⑤ 计算积分

3.4-1 卷积的计算——图解法

例　已知 $f(t)=e^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

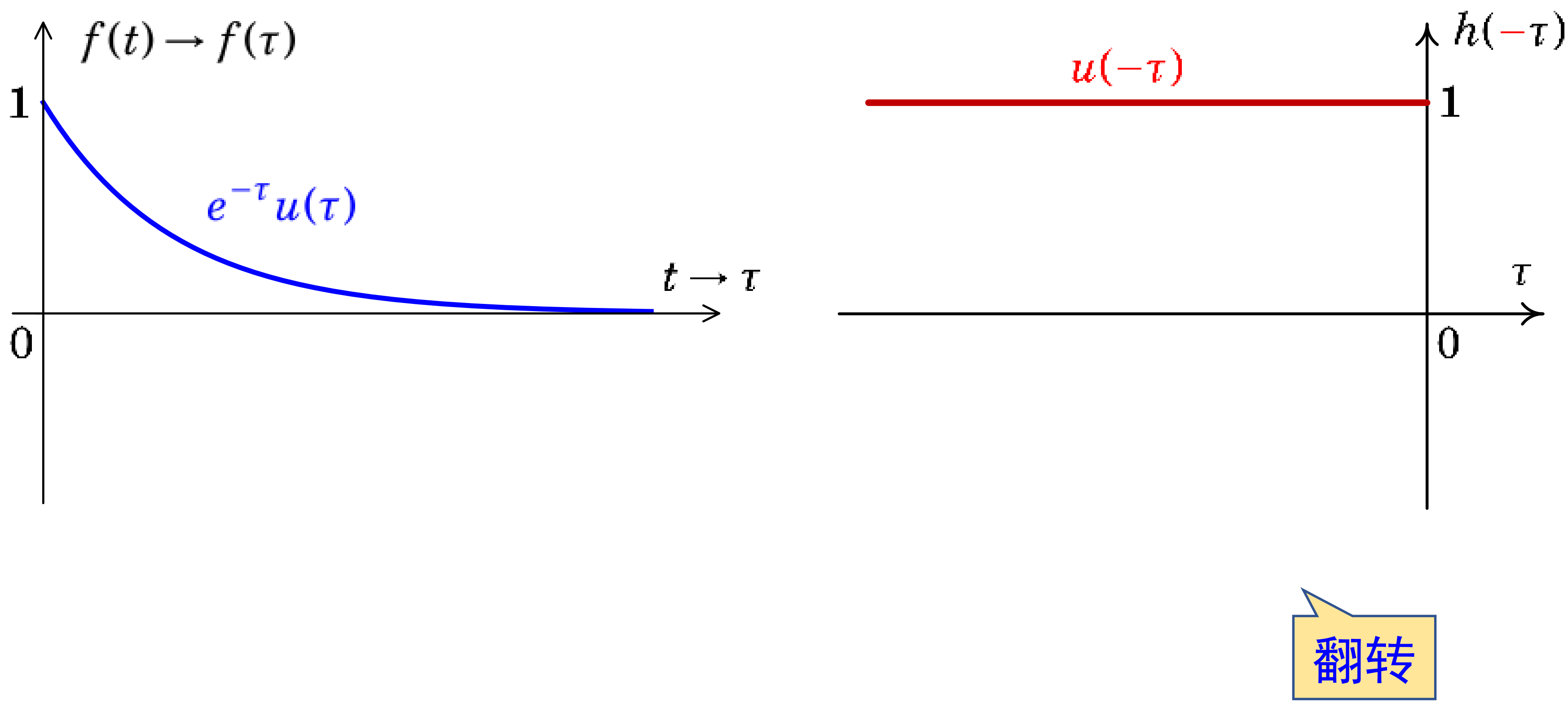




替换

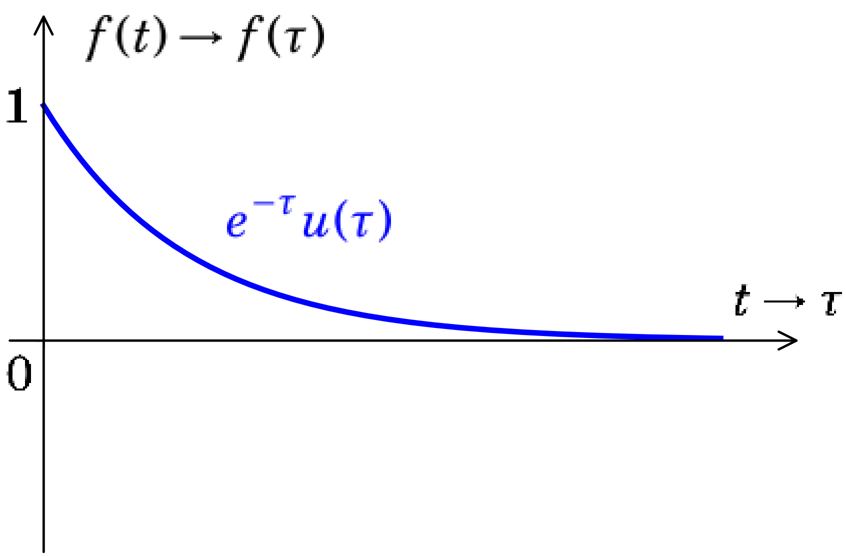
3.4-1 卷积的计算——图解法

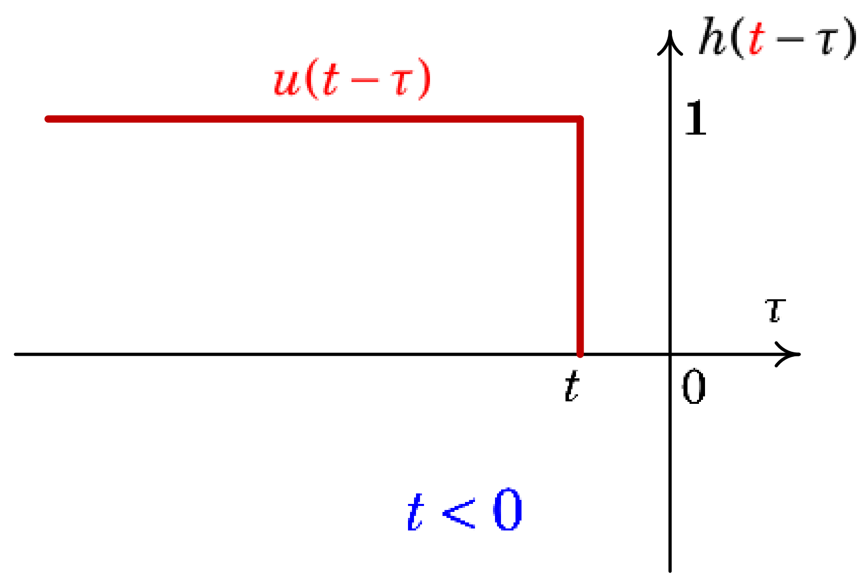
例 已知 $f(t)=e^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$



3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=e^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

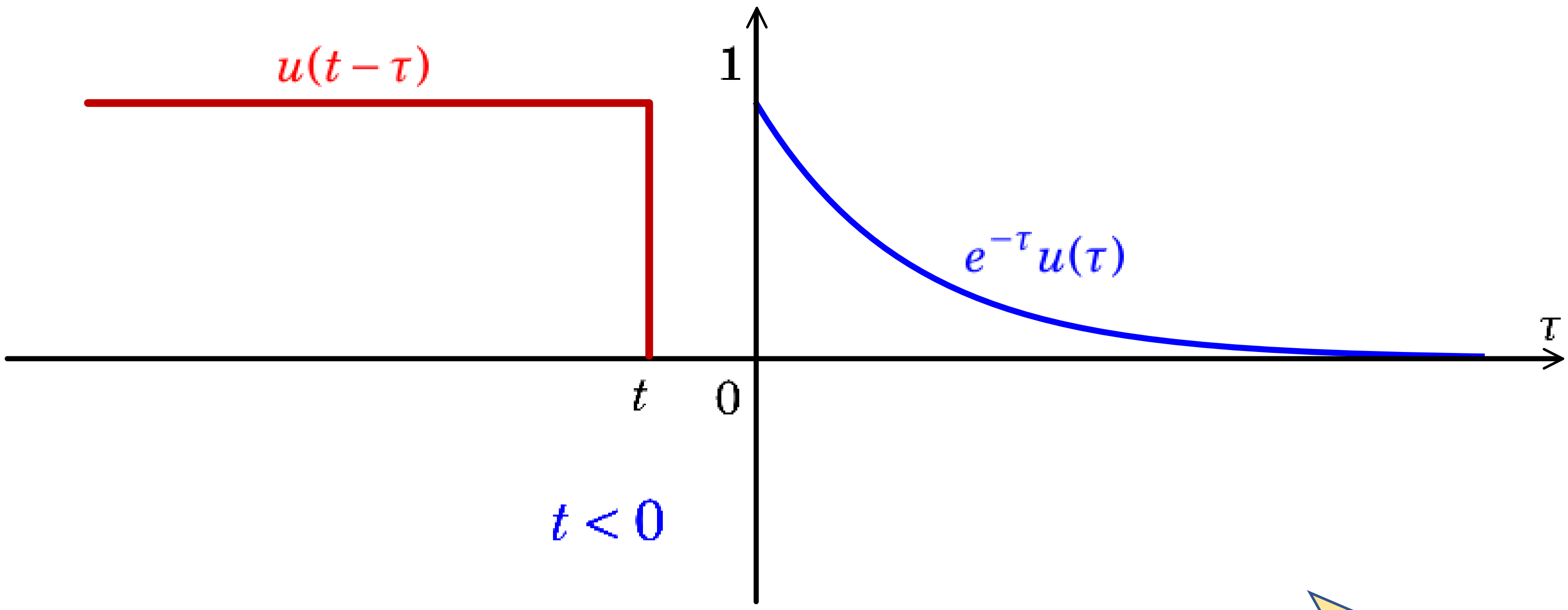




平移

3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=e^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

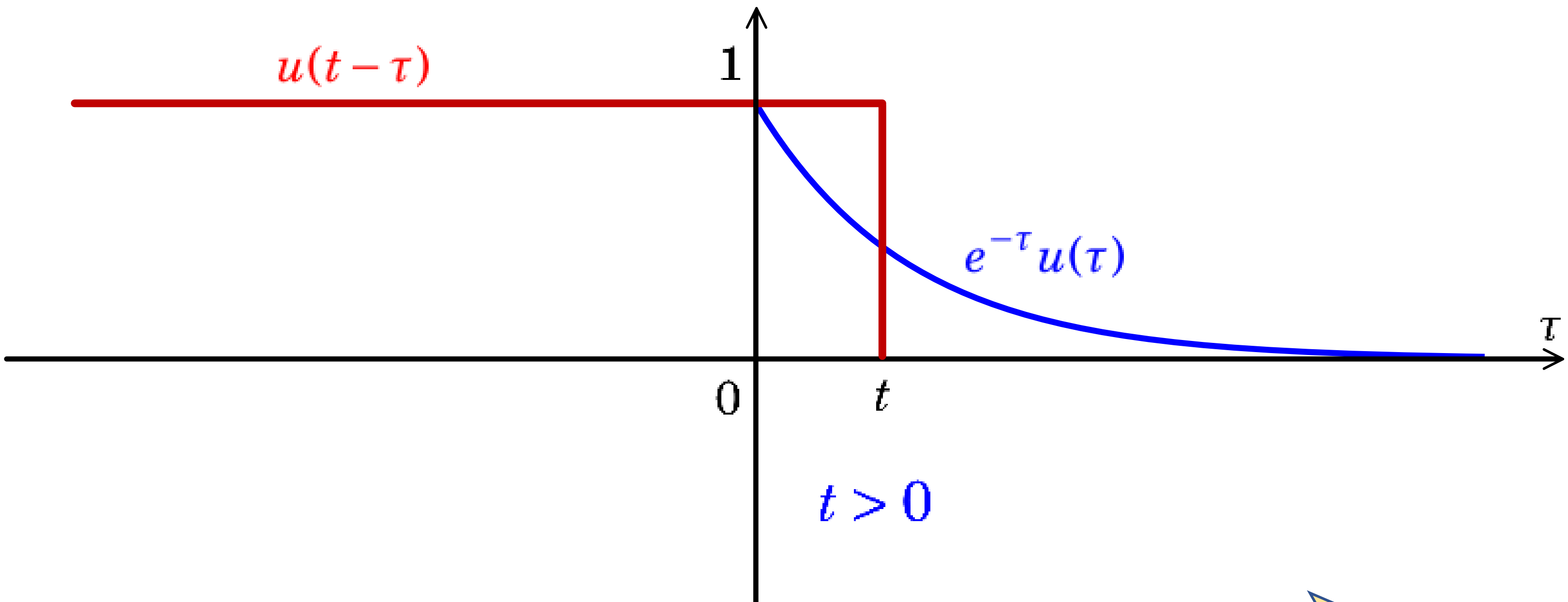


计算乘积

- 计算 $t<0,\ f(\tau)h(t-\tau)=0$

3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=e^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

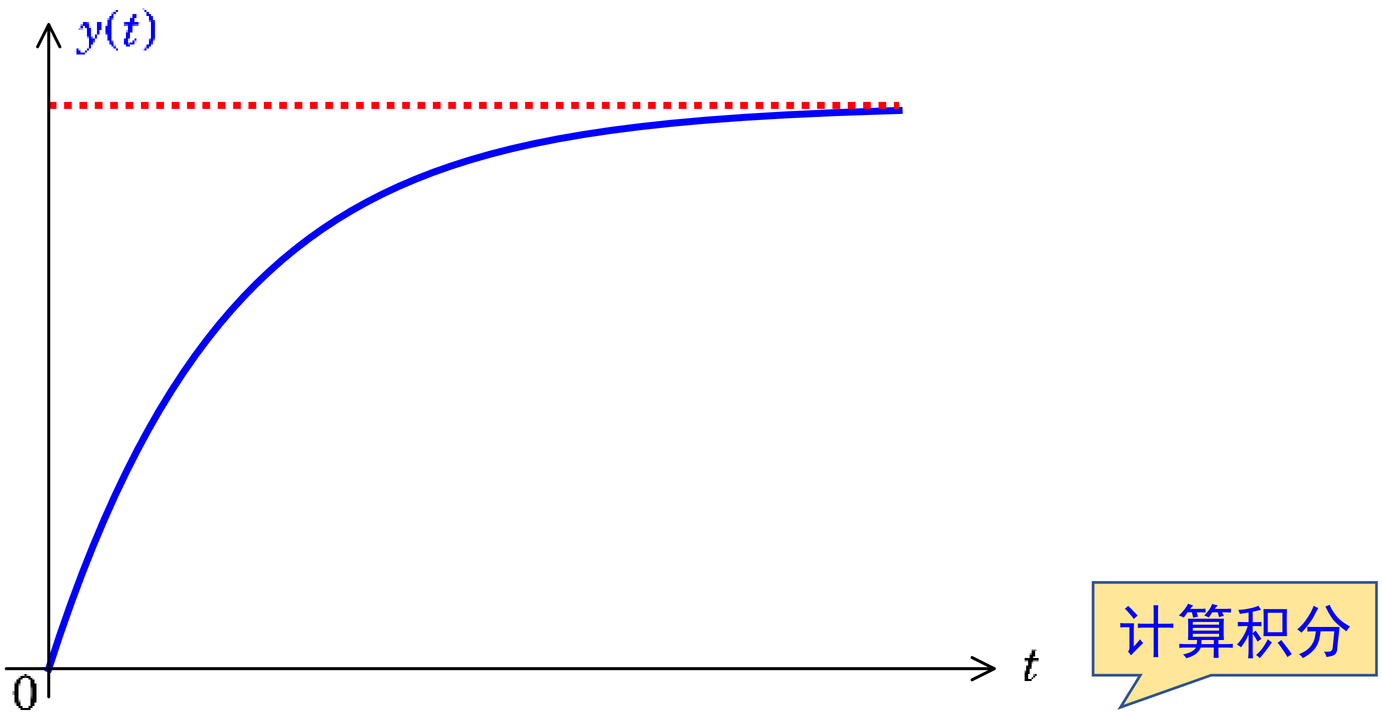


计算乘积

- 计算 $t>0,\ f(\tau)h(t-\tau)=e^{-\tau}$

3.4-1 卷积的计算——图解法

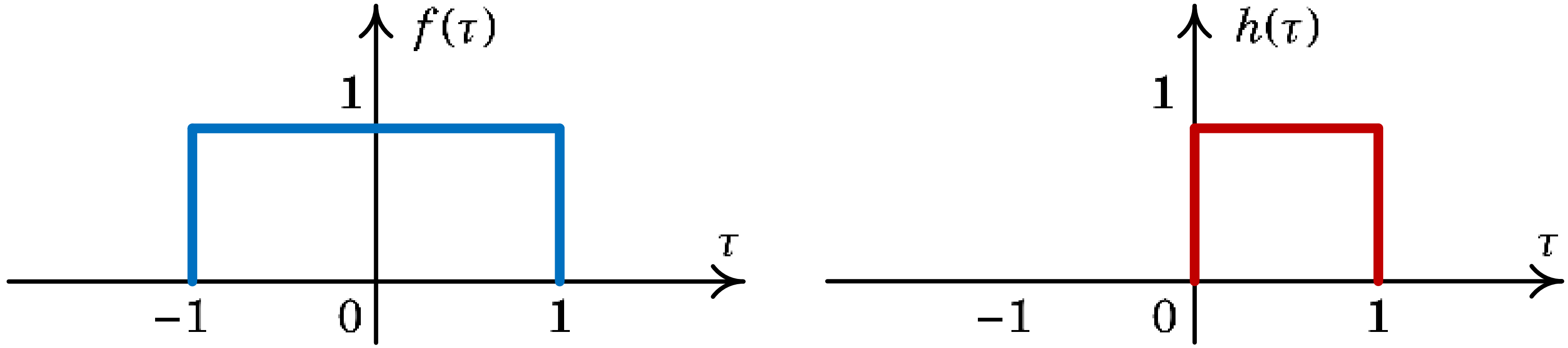
例 已知 $f(t)=e^{-t}u(t),\ h(t)=u(t)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$



- 计算 $y(t)=\int_0^{t} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^{t} e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = (1-e^{-t})u(t)$

3.4-1 卷积的计算——图解法

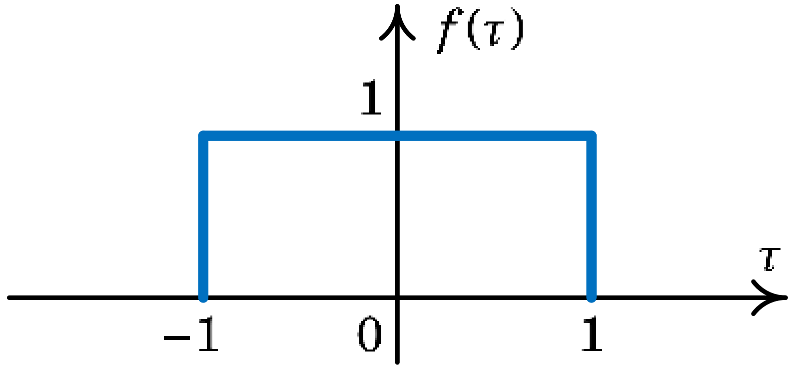
例 已知 $f(t)=p_2(t),\ h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

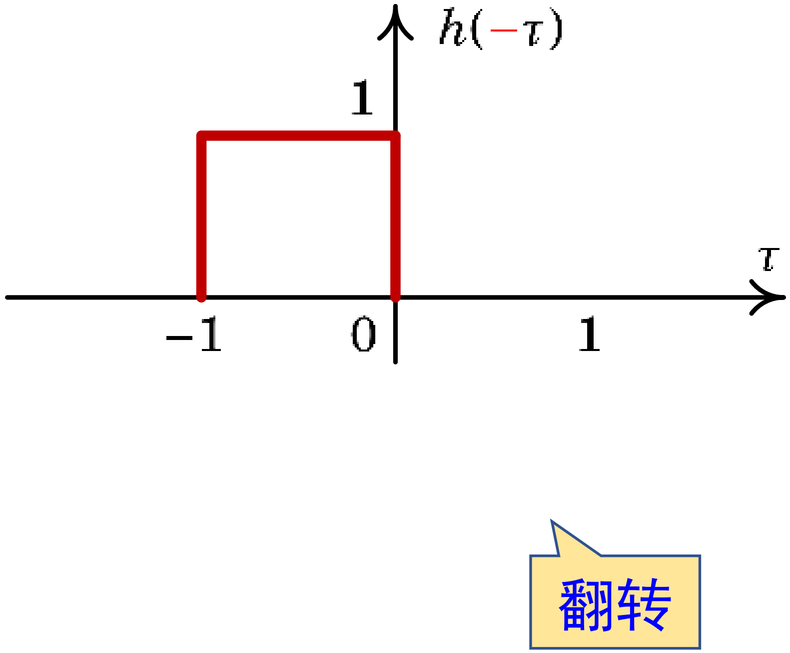


替换

3.4-1 卷积的计算——图解法

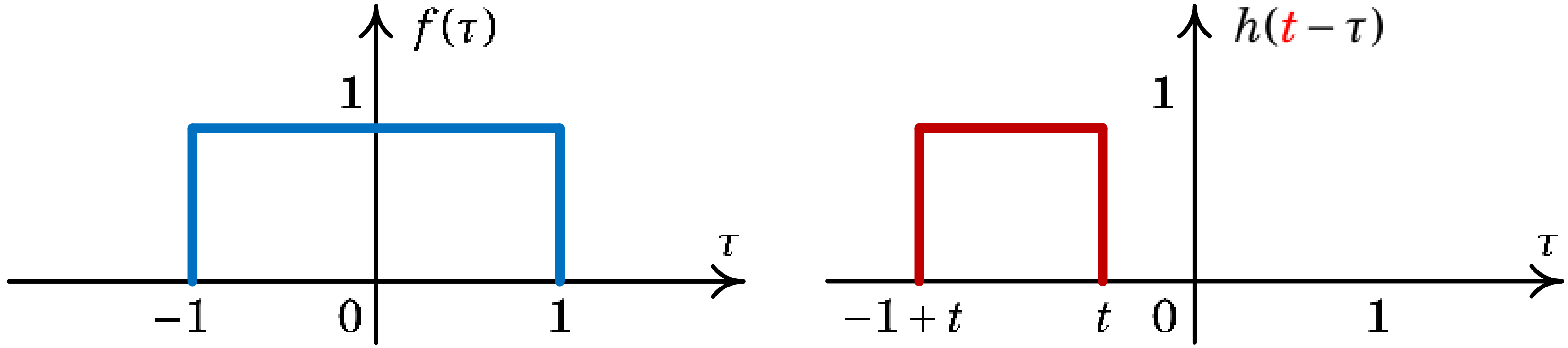
例 已知 $f(t)=p_2(t),\ h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$





3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=p_2(t),\ h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

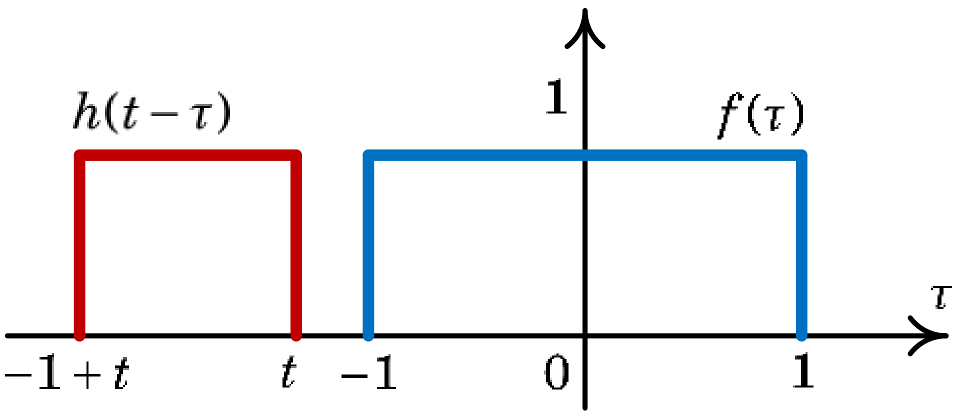


$t<0$

平移

3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=p_2(t),\ h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

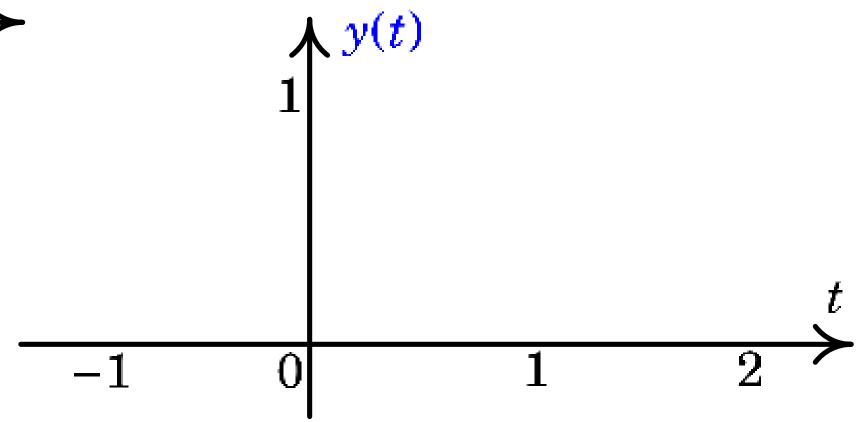


计算乘积与积分

$t<-1$

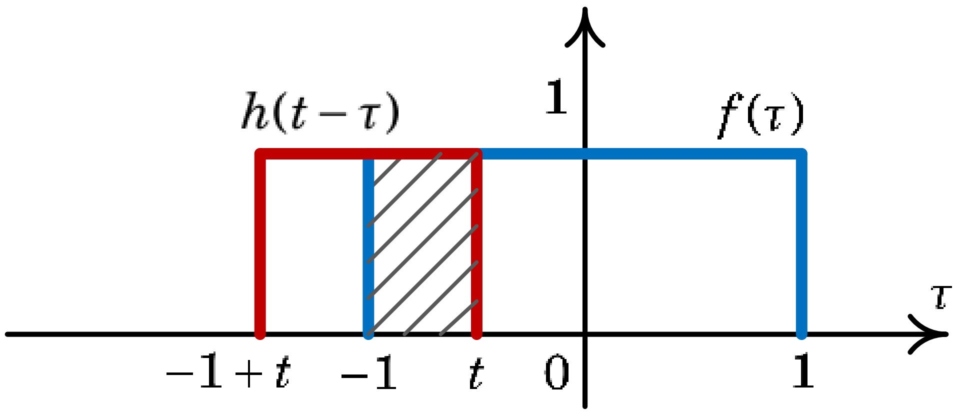
$f(\tau)h(t-\tau)=0$

$y(t)=0$



3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=p_2(t),\ h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

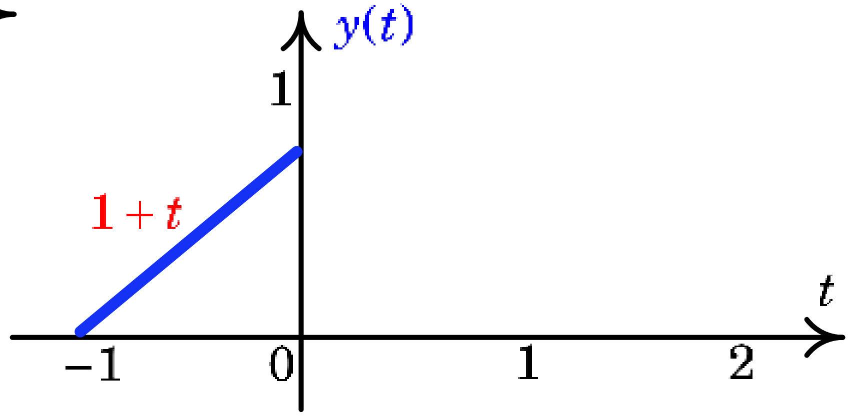


计算乘积与积分

$-1\leqslant t<0$

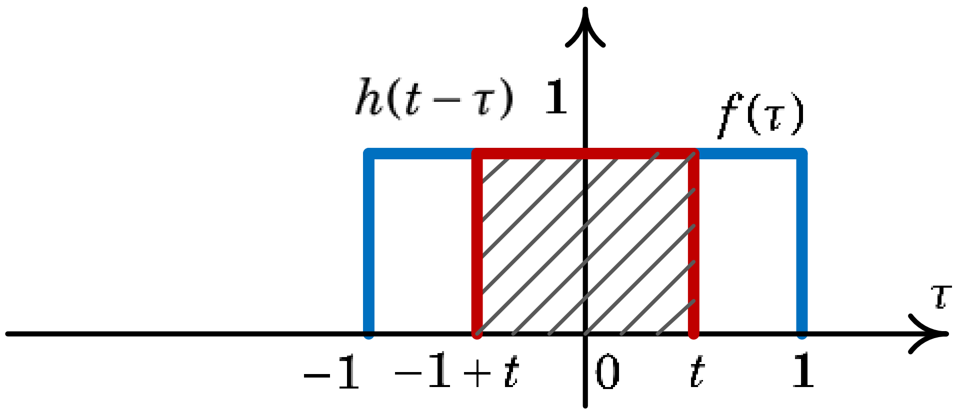
$f(\tau)h(t-\tau)=1$

$$y(t)=\int_{-1}^{t}1\mathrm{d}\tau=1+t$$

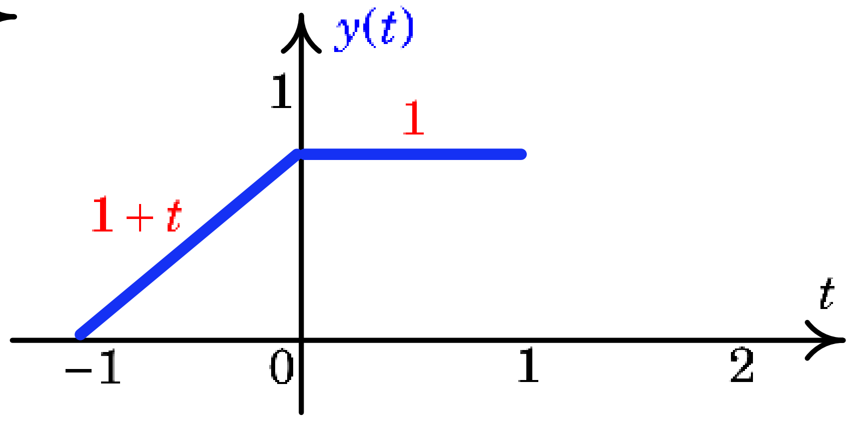


3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=p_2(t)$, $h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$



计算乘积与积分



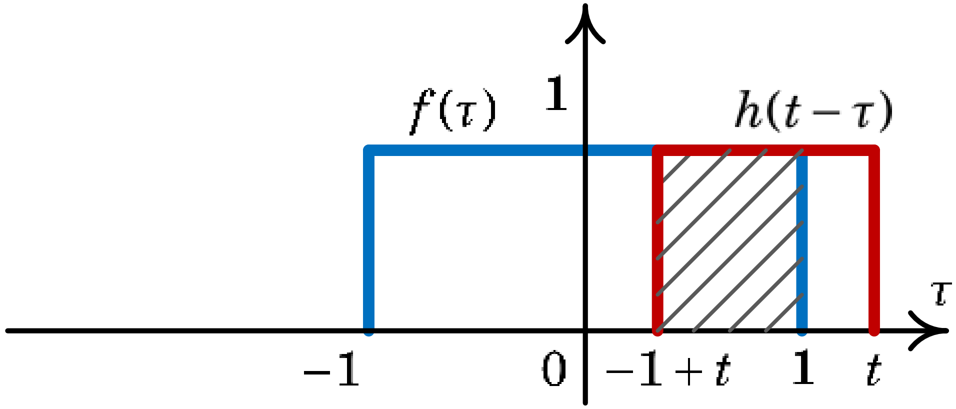
$$0 \leqslant t < 1$$

$$f(\tau)h(t-\tau)=1$$

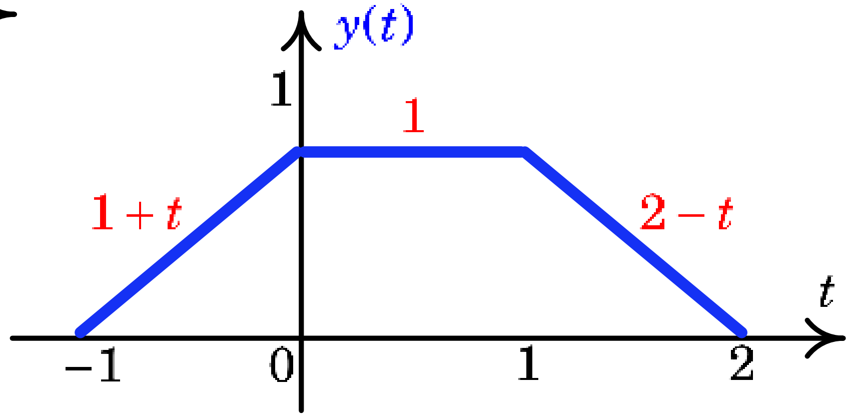
$$y(t)=\int_{-1+t}^{t} 1\mathrm{d}\tau = 1$$

3.4-1 卷积的计算——图解法

例　已知 $f(t)=p_2(t),\ h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$



计算乘积与积分



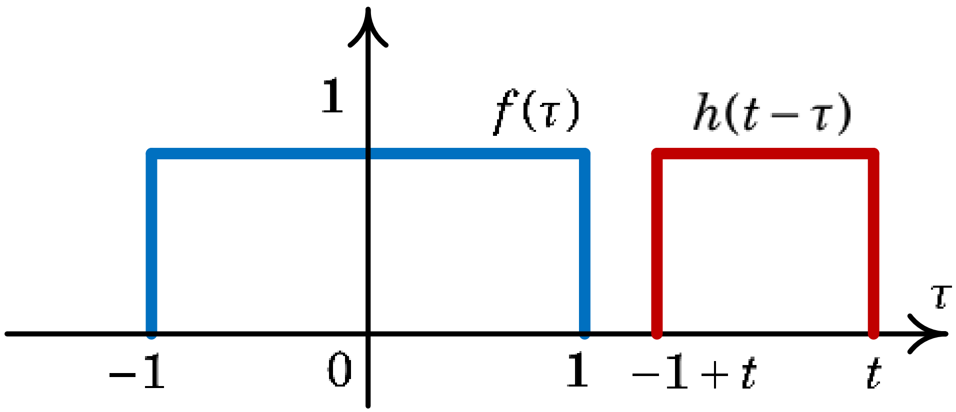
$1\leqslant t<2$

$f(\tau)h(t-\tau)=1$

$$y(t)=\int_{-1+t}^{1}1\mathrm{d}\tau=2-t$$

3.4-1 卷积的计算——图解法

例 已知 $f(t)=p_2(t)$, $h(t)=p_1(t-0.5)$，计算卷积 $y(t)=f(t)*h(t)$

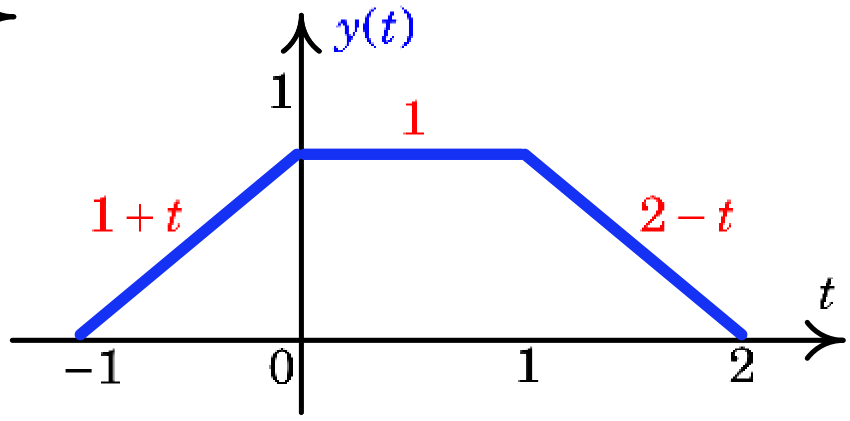


计算乘积与积分

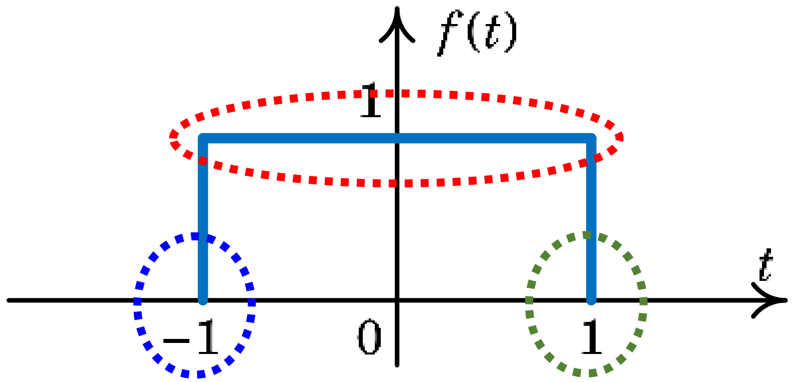
$t \geqslant 2$

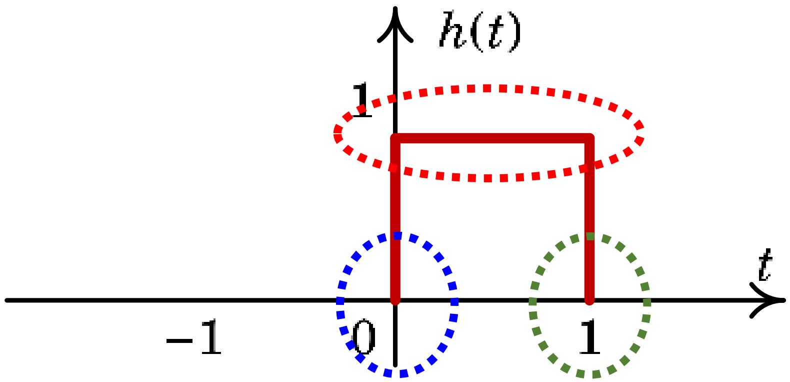
$f(\tau)h(t-\tau)=0$

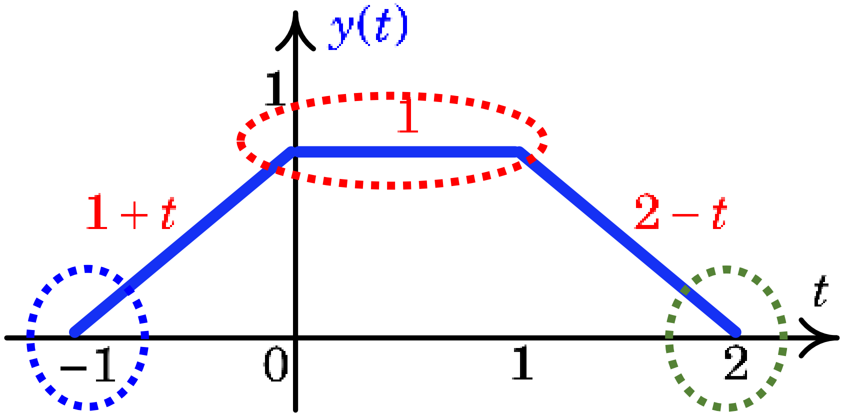
$y(t)=0$



3.4-1 卷积的计算——图解法





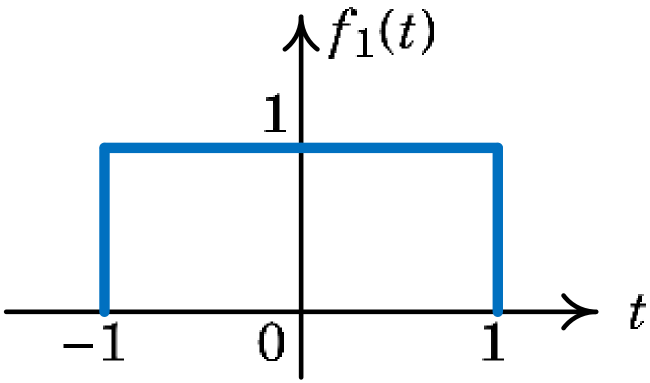


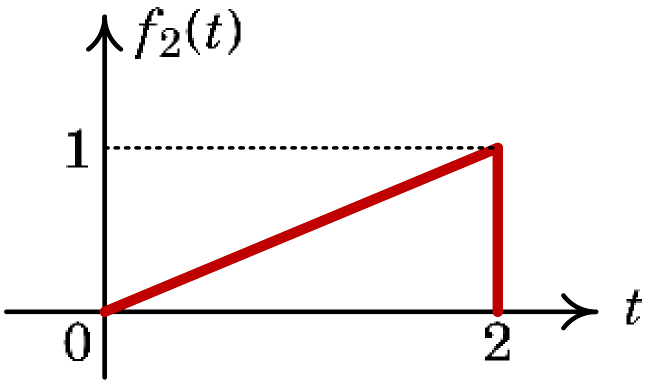
3.4-1 卷积的计算——图解法

图解法求卷积小结：

- 图解法关键：确定积分区间与被积函数表达式
- 图解法较繁琐：特别适用某时刻点上的卷积
- $y(t)$起点为$f(t)$, $h(t)$的起点之和
- $y(t)$终点为$f(t)$, $h(t)$的终点之和
- 若$f(t)$, $h(t)$中不含$\delta(t)$及其各阶导数，则$y(t)$必连续
- 尽量选择简单信号进行翻转

练 求图示两个波形的卷积积分





3.4-2 卷积的计算——解析法

【例】计算卷积 $u(t)*u(t)$。

解：$u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ $\qquad \tau<0\Rightarrow u(\tau)=0$

$$=\int_{0}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad t-\tau<0\Rightarrow u(t-\tau)=0$$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{t}1\cdot 1\mathrm{d}\tau, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

$$=tu(t)$$

$$=r(t)$$

3.4-2 卷积的计算——解析法

【例】已知 $f_1(t)=e^{-3t}u(t)$, $f_2(t)=e^{-5t}u(t)$，计算卷积 $f_1(t)*f_2(t)$。

解：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)e^{-5(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)e^{-5(t-\tau)}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-3\tau}e^{-5(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot u(t)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-3t}-e^{-5t}\right)u(t)$$

3.4-2 卷积的计算——解析法

常用信号的卷积积分表		
f_1	f_2	$f_1 * f_2(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$r(t)$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$e^{-\beta t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha-\beta}(e^{-\beta t}-e^{-\alpha t})u(t),\quad \alpha \neq \beta$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$e^{-\alpha t}u(t)$	$te^{-\alpha t}u(t)$
$t^n u(t)$	$t^m u(t)$	$\frac{n!m!}{(n+m+1)!}t^{n+m+1}u(t)$

3.4-3 卷积的性质

<table>
<tr><th colspan="3">卷积的性质</th></tr>
<tr><td>• 交换律</td><td colspan="2">$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$</td></tr>
<tr><td>• 分配律</td><td colspan="2">$[f_1(t)+f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)$</td></tr>
<tr><td>• 结合律</td><td colspan="2">$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$</td></tr>
<tr><td>• 平移特性</td><td colspan="2">$f_1(t)*f_2(t)=y(t) \Rightarrow f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$</td></tr>
<tr><td>• 微分特性</td><td rowspan="3">$$\begin{aligned} y(t)&=f(t)*h(t)\\ &=h(t)*f(t)\end{aligned}$$</td><td>$$\begin{aligned} \Rightarrow y'(t)&=f'(t)*h(t)\\ &=h'(t)*f(t)\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>• 积分特性</td><td>$$\begin{aligned} \Rightarrow y^{(-1)}(t)&=f^{(-1)}(t)*h(t)\\ &=h^{(-1)}(t)*f(t)\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>• 等效特性</td><td>$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t)&=f^{(-1)}(t)*h'(t)\\ &=h^{(-1)}(t)*f'(t)\end{aligned}$$</td></tr>
</table>

3.4-3 卷积的性质

【交换律】 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

证明： $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ $\qquad t-\tau=\bar{\tau}$

$$=-\int_{\infty}^{-\infty}f_1(t-\bar{\tau})f_2(\bar{\tau})\mathrm{d}\bar{\tau}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\bar{\tau})f_1(t-\bar{\tau})\mathrm{d}\bar{\tau}$$

$$=f_2(t)*f_1(t)$$

3.4-3 卷积的性质

【分配律】 $[f_1(t)+f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)$

证明： $[f_1(t)+f_2(t)]*f_3(t)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\tau)+f_2(\tau)]f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)$$

3.4-3 卷积的性质

【结合律】 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

证明： 左式 $=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)f_2(\tau-\sigma)\mathrm{d}\sigma\right]f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)f_2(\tau-\sigma)f_3(t-\tau)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau-\sigma)f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\sigma$$

$\tau-\sigma=s$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(s)f_3(t-\sigma-s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\sigma$$

3.4-3 卷积的性质

【结合律】 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

证明： 左式 $=\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(s)f_3(t-\sigma-s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)[f_2(t-\sigma)*f_3(t-\sigma)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

3.4-3 卷积的性质

【平移特性】 $f_1(t) * f_2(t) = y(t)$

$$\Rightarrow f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = \boxed{y(t-t_1-t_2)}$$

证明： 右式 $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-t_1-t_2-\tau)\mathrm{d}\tau$

左式 $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\underbrace{\tau - t_1}_{=\bar{\tau}}) f_2(t-\tau-t_2)\mathrm{d}\tau$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\bar{\tau}) f_2(t-t_1-t_2-\bar{\tau})\mathrm{d}\bar{\tau}$

试计算： $f_1(t-t_1-t_2) * f_2(t-t_1-t_2)$

3.4-3 卷积的性质

【微分特性】 $y(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$ $\Rightarrow y'(t)=f'(t)*h(t)=h'(t)*f(t)$

证明：

$$y'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h'(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=f(t)*h'(t)$$

3.4-3 卷积的性质

【积分特性】 $y(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$ $\Rightarrow y^{(-1)}(t)=\boxed{f^{(-1)}(t)*h(t)}=h^{(-1)}(t)*f(t)$

证明：

$$f^{(-1)}(t)*h(t)$$

$$=f(t)*u(t)*h(t)$$

$$=[f(t)*h(t)]*u(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[f(\tau)*h(\tau)]u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)*h(\tau)\mathrm{d}\tau=y^{(-1)}(t)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)*u(t)}$$

3.4-3 卷积的性质

【等效特性】 $y(t)=f(t)*h(t)$ $\Rightarrow$ $y(t)=f^{(-1)}(t)*h'(t)$

$=h(t)*f(t)$ $=h^{(-1)}(t)*f'(t)$

证明：
$$
\begin{aligned}
f'(t)*h^{(-1)}(t) &= f'(t)*h(t)*u(t) \\
&= [f'(t)*h(t)]*u(t) \\
&= y'(t)*u(t) \\
&= \int_{-\infty}^{t} y'(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= y(t)
\end{aligned}
$$

3.4-4 奇异信号的卷积

奇异信号卷积的性质	
• 延时特性	$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$
• 微分特性	$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$
• 积分特性	$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(-1)}(t)$

【延时特性】 $=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-T-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-(t-T))\mathrm{d}\tau$$

$$=f(t-T)$$

3.4-4 奇异信号的卷积

奇异信号卷积的性质	
• 延时特性	$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$
• 微分特性	$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$
• 积分特性	$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(-1)}(t)$

【微分特性】 $$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta'(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\mathrm{d}\delta(t-\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f'(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad =f'(t)$$

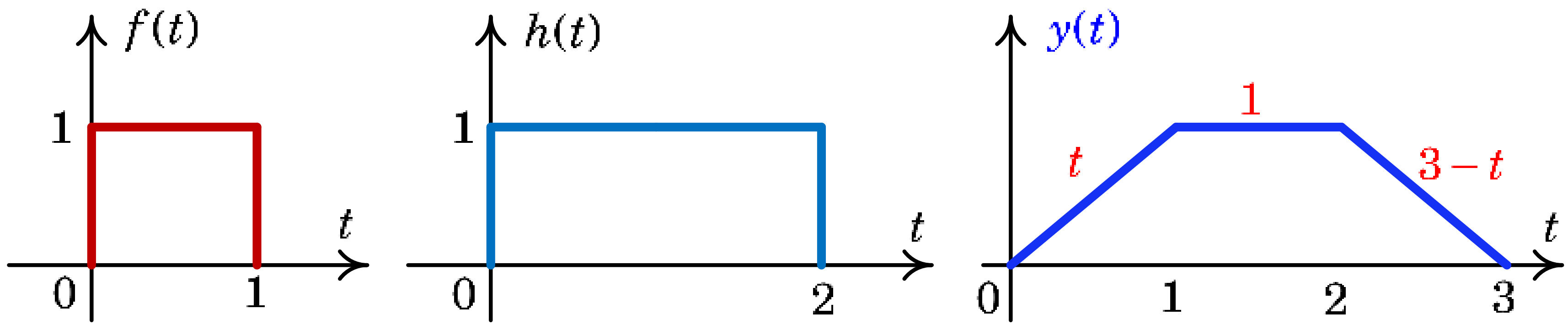
3.4-4 奇异信号的卷积

奇异信号卷积的性质	
• 延时特性	$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$
• 微分特性	$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$
• 积分特性	$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(-1)}(t)$

【积分特性】 $=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

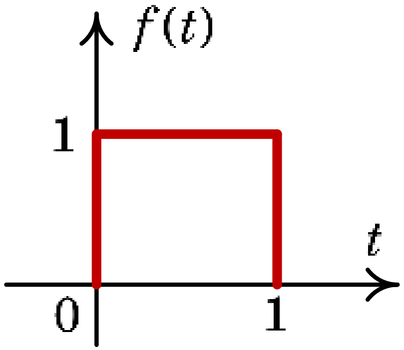
【例】利用卷积的平移特性计算 $y(t)=f(t)*h(t)$。

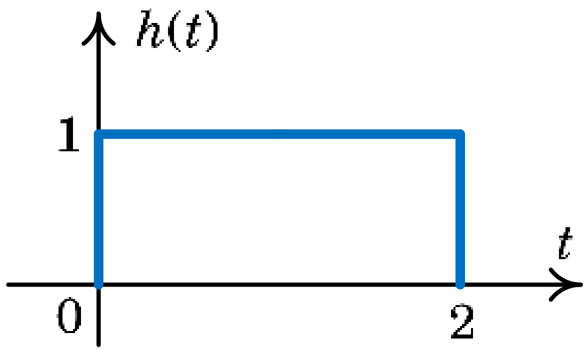


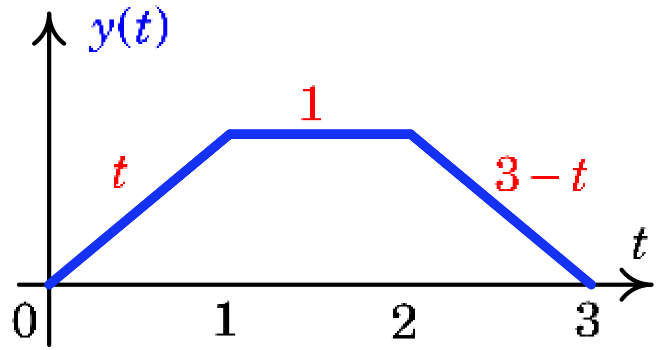
解： $f(t)=u(t)-u(t-1)\qquad h(t)=u(t)-u(t-2)$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t)*h(t)\\
&= [u(t)-u(t-1)]*[u(t)-u(t-2)]\\
&= u(t)*u(t)-u(t-1)*u(t)-u(t)*u(t-2)+u(t-1)*u(t-2)\\
&= r(t)-r(t-1)-r(t-2)+r(t-3)
\end{aligned}
$$

【例】利用卷积的微分特性计算 $y(t)=f(t)*h(t)$。





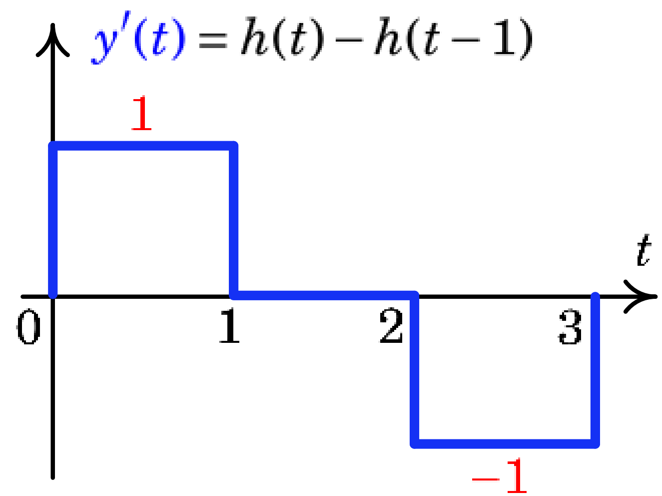


解： $y'(t)=f'(t)*h(t)$　　$f'(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$

$$=[\delta(t)-\delta(t-1)]*h(t)$$

$$=h(t)-h(t-1)$$

$$y(t)=r(t)-r(t-1)-r(t-2)+r(t-3)$$



§3.5 冲激响应表示的系统特性

级联系统	并联系统	因果系统	稳定系统

3.5-1 级联系统的冲激响应

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$f(t)*h_1(t) \qquad\qquad f(t)*h_1(t)*h_2(t)$$

$$y(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

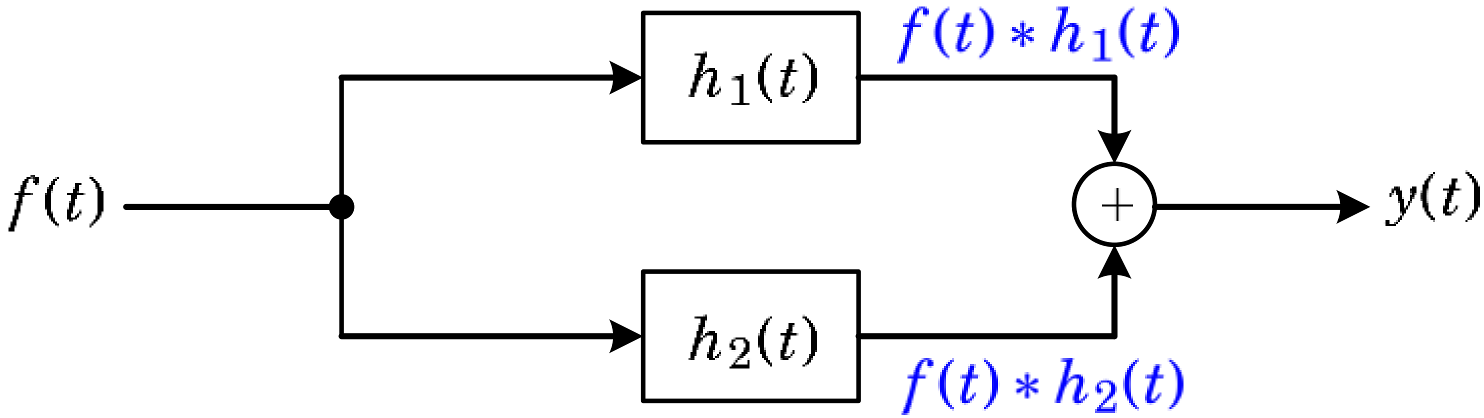
结合律

$$=f(t)*h(t)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=h_1(t)*h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

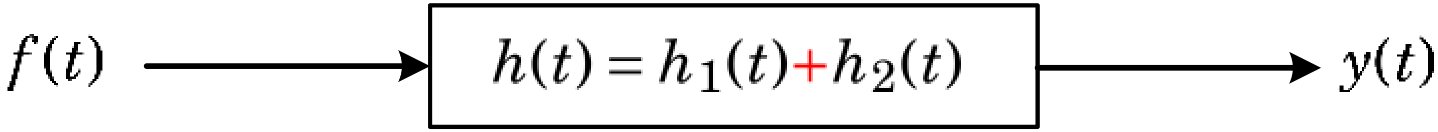
意义：子系统级联后的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积

3.5-2 并联系统的冲激响应



$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t) \\
&= f(t)*[h_1(t)+h_2(t)] \\
&= f(t)*h(t)
\end{aligned}
$$

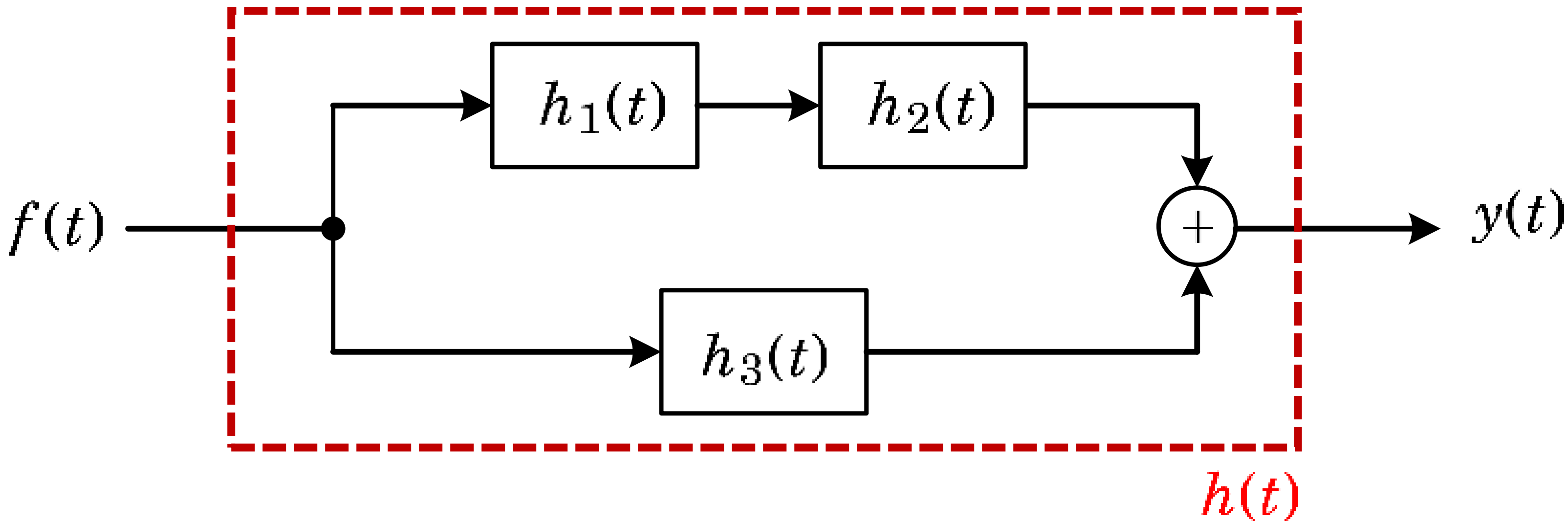
分配律



意义： 子系统并联后的冲激响应等于子系统冲激响应之和

【例】求图示系统的冲激响应 $h(t)$，其中

$$h_1(t)=e^{-3t}u(t),\quad h_2(t)=\delta(t-1),\quad h_3(t)=u(t)$$



解：$h(t)=h_1(t)*h_2(t)+h_3(t)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)\delta(t-1-\tau)\mathrm{d}\tau+u(t)$$

$$=e^{-3(t-1)}u(t-1)+u(t)$$

3.5-3 因果系统（利用冲激响应描述）

- **因果系统**：任何时刻系统输出仅取决于现在和过去的输入（零状态响应不超前于激励）

$$f_1(t)=0,\ \ t<t_0 \quad \Rightarrow \quad y_1(t)=0,\ \ t<t_0$$

- 连续时间**LTI**系统的输出 $y(t)=f(t)*h(t)$
- 卷积的起点关系：$p_f+p_h=p_y$
- 当且仅当 $p_h\geqslant 0$才有 $p_f\leqslant p_y$

$$\boxed{\text{因果} \iff p_f\leqslant p_y \iff p_h\geqslant 0 \iff h(t)=0,\ \ t<0}$$

- **因果连续时间LTI系统的卷积**

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{或} \quad y(t)=\int_{0}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau}$$

3.5-4 稳定系统

- 定义：系统对任意有界输入，其输出也有界，即

$$|f(t)| \leqslant M_f < \infty \Rightarrow |y(t)| \leqslant M_y < \infty$$

BIBO稳定

- 如何验证任意有界输入？

冲激响应是对系统本身特性的表征

- 利用冲激响应建立的输入输出关系

- 定理：连续时间**LTI**系统稳定的充要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau = S < \infty$$

冲激响应绝对可积

【例】 已知因果 LTI 系统的冲激响应 $h(t)=e^{at}u(t)$，判断该系统是否稳定？

解：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}|h(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

因果性

$$=\int_{0}^{\infty}e^{a\tau}\mathrm{d}\tau:=S$$

若 $a<0$，则 $S=-\dfrac{1}{a}$

若 $a\geqslant 0$，则 $S=\infty$

本章小结

- LTI系统的描述及特点
- 连续时间LTI系统的响应
- 连续时间系统的冲激响应
- 卷积积分
- 冲激响应表示的系统特性
- 学习要求：
  1. 掌握LTI系统的数学描述、特性，系统的完全响应
  2. 深刻体会冲激响应在系统描述中的作用
  3. 熟练掌握卷积的两种计算方法，灵活使用卷积的性质

附：第3次作业

- **第105-109页：**

3-2：(2)，(3)，(5)，(6)，(8) 不用过程，仅判断结果即可

3-11：(4)

3-13

3-15：(a)

3-16：(5)

3-8：(2) 零状态响应用卷积法做