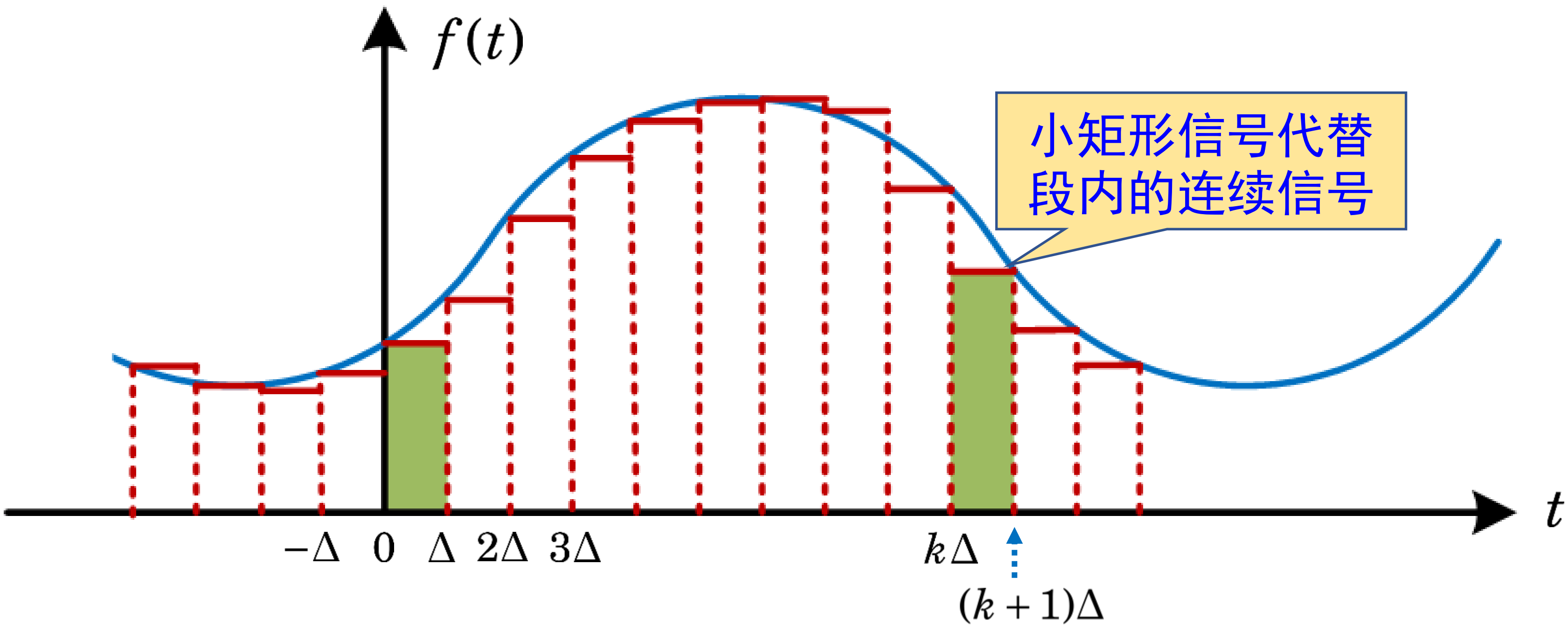



# 第4章 周期信号的频域分析

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | https://sslic.cn/ss

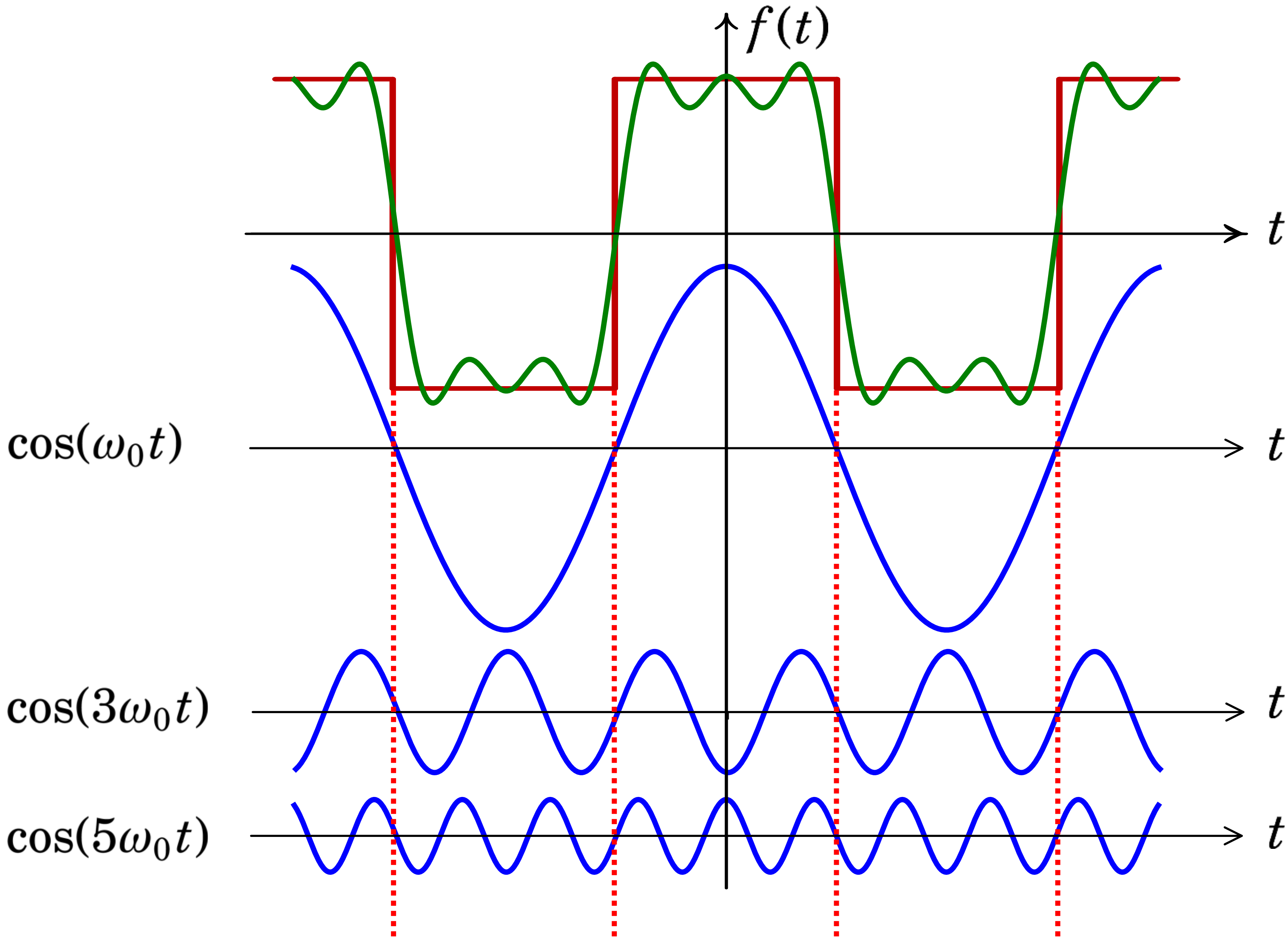


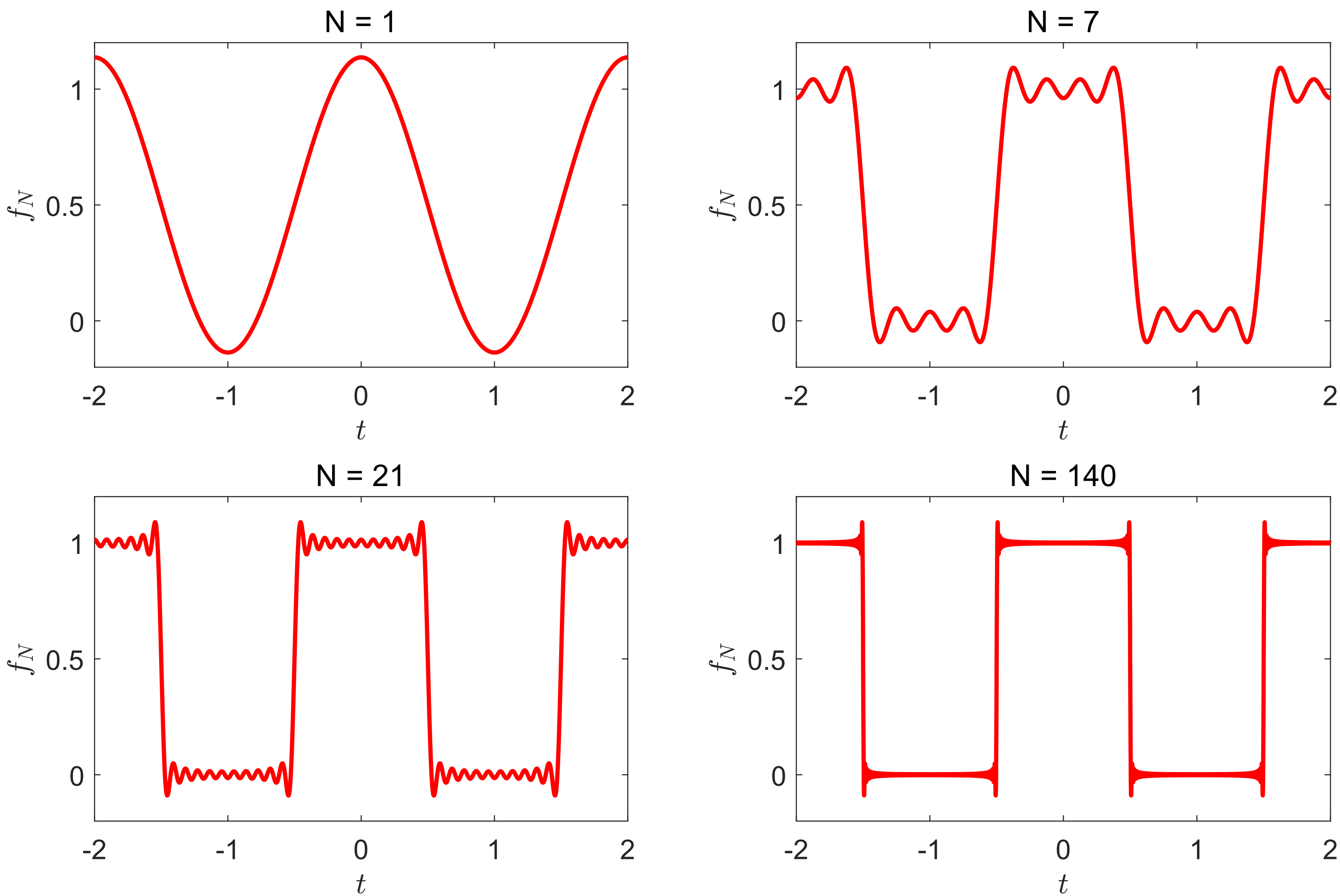

**信号的时域分解**

**单位冲激信号的线性组合**

基底：$\delta(t-k\Delta)$

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$


$f(t)$
$t$
$\cos(\omega_0 t)$
$t$
$\cos(3\omega_0 t)$
$t$
$\cos(5\omega_0 t)$
$t$


N = 1
N = 7
N = 21
N = 140
$f_N$
$t$
1
0.5
0
-2
-1
0
1
2

**信号的时域分解**

**单位冲激信号的线性组合**

基底：$\delta(t-k\Delta)$

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

**周期信号的频域分解**

**正弦类信号的线性组合**

基底：$e^{jn\omega_0 t}$

Fourier系数
频谱、复振幅

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Fourier
Lagrange
Dirichlet

- 分离不同频率信号分量，信号处理，如滤波器
- 其他逼近技术：神经网络、模糊逻辑等

# 本章主要内容

- 连续时间信号的Fourier级数
- 连续时间Fourier级数的基本性质
- 连续周期信号的频谱分析

# §4.1 连续时间信号的Fourier级数

1. 指数形式的Fourier级数
2. 三角形式的Fourier级数
3. Fourier级数的收敛条件
4. 信号对称性和Fourier级数的关系

# 4.1-1 指数形式的Fourier级数

- **周期信号**：定义于区间 $(-\infty,\infty)$ 区间，每隔一定的时间 $T_0$，按相同规律变化的信号

$$\exists\, T_0>0 \;\Rightarrow\; f(t+T_0)=f(t_0),\; t\in\mathbb{R}$$

- 基波周期：最小的 $T_0$
- 基波频率：$f_0=1/T_0$
- 基波角频率：$\omega_0=2\pi/T_0$

- **虚指数信号**：$e_1(t)=e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$

$\xrightarrow[n=\pm1,\pm2,\ldots]{\text{n 倍}}$

- 基波角频率：$\omega_0$
- 基波周期：$T_0=2\pi/\omega_0$
- 基波频率：$f_0=1/T_0$

$e_n(t)=e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$

- n次谐波角频率：$n\omega_0$
- n次谐波周期：$T_0/n$
- n次谐波频率：$nf_0$

# 4.1-1 指数形式的Fourier级数

- 周期信号的Fourier级数：由 $e_n(t)$ 的线性组合表示式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

- $n=0$ ：直流分量
- $n=\pm 1$ ：1次谐波分量（基波分量）
- $n=\pm 2$ ：2次谐波分量
- $n=\pm N$：N次谐波分量

- Fourier系数计算公式：

如何证明

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

# 4.1-1 指数形式的Fourier级数

## □ Fourier系数计算公式的证明：

第1步：信号集 $\{e_n(t)\}$ 具有正交性，即先证

$$\int_0^{T_0} e_n(t)e_k^*(t)\mathrm{d}t = T_0\delta[n-k] = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ T_0, & n = k \end{cases}$$

$$e_n(t) = e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$
$$e_k^*(t) = e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

左式 $n \neq k$ $= \int_0^{T_0} e^{\mathrm{j}(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t$

$= 0$

虚指数信号在一个周期内积分

左式 $n = k$ $= \int_0^{T_0} e^{\mathrm{j}(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t = \int_0^{T_0} 1\mathrm{d}t = T_0$

# 4.1-1 指数形式的Fourier级数

## □ Fourier系数计算公式的证明：

第2步：利用正交性证明Fourier系数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$f(t)e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}(n-k)\omega_0 t}$$

$$\int_0^{T_0} f(t)e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t=\int_0^{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_0^{T_0} e^{\mathrm{j}(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

# 4.1-1 指数形式的Fourier级数

三角形式Fourier级数呢

## □ Fourier系数计算公式的证明：

第2步：利用正交性证明Fourier系数

正交性

$$\int_0^{T_0} f(t)e^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \boxed{\int_0^{T_0} e^{\mathrm{j}(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \boxed{T_0\delta[n-k]}$$

$k=n$

$$\int_0^{T_0} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = C_n T_0$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

# 4.1-2 三角形式的Fourier级数

□ Fourier系数的共轭对称性：$f(t)$为实信号，则

$$\boxed{C_n = C^*_{-n}}$$

**证明:**

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$C_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$C^*_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$= C_n$$

# 4.1-2 三角形式的Fourier级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

指数形式Fourier级数

$$=C_0+\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{C_{-n}e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}+C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)^*+C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)$$

$$=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)$$

共轭对称性

$$C_n=C^*_{-n}$$

$$C^*_n=C_{-n}$$

$$=C_{-n}e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$=C^*_n e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$=\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)^*$$

# 4.1-2 三角形式的Fourier级数

$$f(t) = C_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left((a_n - \mathrm{j}b_n) e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

令 $C_0 = \dfrac{a_0}{2}$ $\quad C_n = \dfrac{1}{2} a_n - \dfrac{1}{2}\mathrm{j} b_n$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t) e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$- \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t)\mathrm{j}\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

# 4.1-2 三角形式的Fourier级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega_0 t)$$

$$C_n=\boxed{\frac{1}{2}a_n}\boxed{-\frac{1}{2}\mathrm{j}b_n}$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$a_0=\frac{2}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\mathrm{d}t$$

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$\frac{1}{2}a_n$

$$=\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{-\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\mathrm{j}\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t}$$

$-\frac{1}{2}\mathrm{j}b_n$

# 4.1-2 三角形式的Fourier级数

- 三角形式Fourier级数：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega_0 t)$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \qquad b_n=\frac{2}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

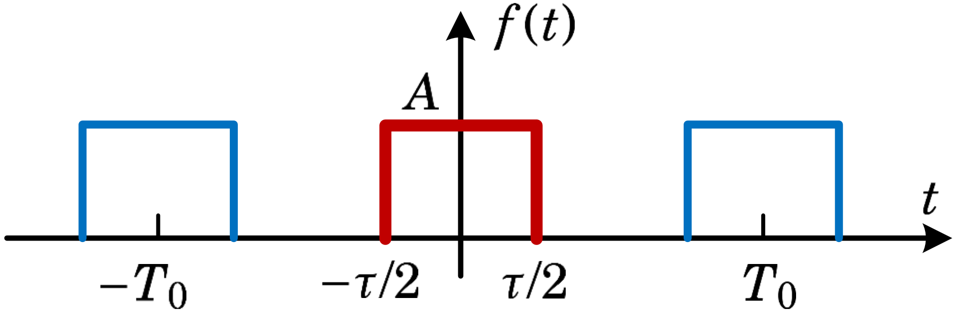
含 0

- Fourier级数转换：指数形式 ⟶ 三角形式

$$f(t)=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)$$

欧拉公式

【例】求图示矩形脉冲信号的Fourier级数展开表示式




解：指数形式Fourier级数

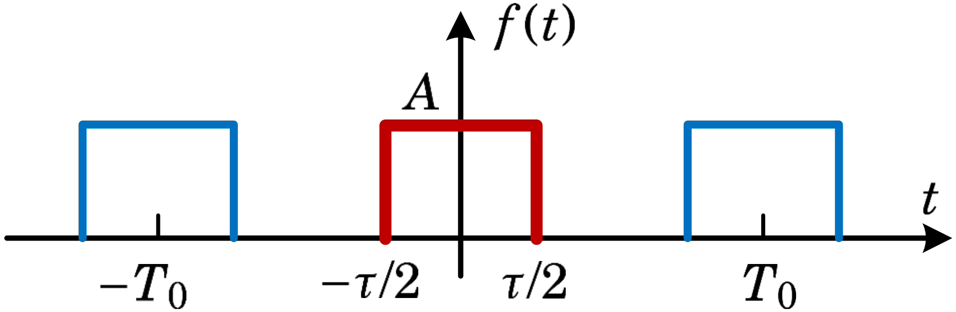
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$\boxed{C_n}=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\tau A\sin(n\omega_0\tau/2)}{T_0 n\omega_0\tau/2}\boxed{=\frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}(n\omega_0\tau/2)}$$

# 【例】求图示矩形脉冲信号的Fourier级数展开表示式




**解：进一步求三角形式Fourier级数**

$$C_n = \frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}(n\omega_0\tau/2)$$

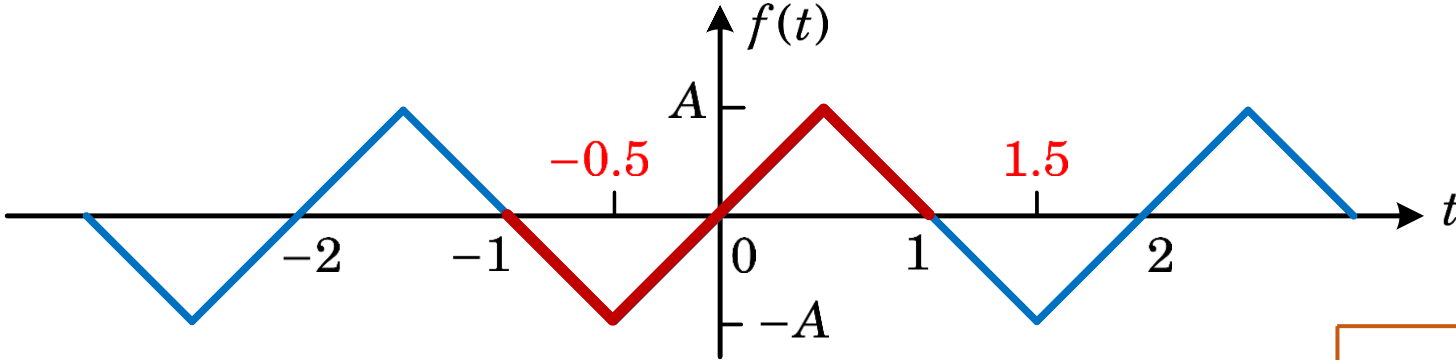
实函数

$$f(t) = C_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(C_n \boxed{e^{jn\omega_0 t}}\right)$$

欧拉公式展开

$$= \frac{\tau A}{T_0} + \frac{2\tau A}{T_0}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}(n\omega_0\tau/2)\boxed{\cos(n\omega_0 t)}$$

# 【例】求图示信号的三角形式Fourier级数展开表示式

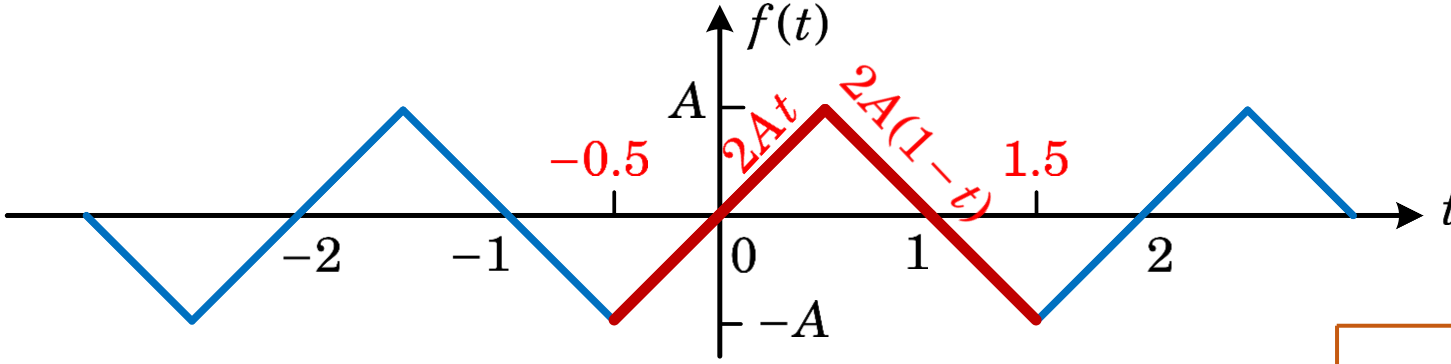



$T_0 = 2$

$\omega_0 = \pi$

解：$a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = 0$

# 【例】求图示信号的三角形式Fourier级数展开表示式




$T_0 = 2$

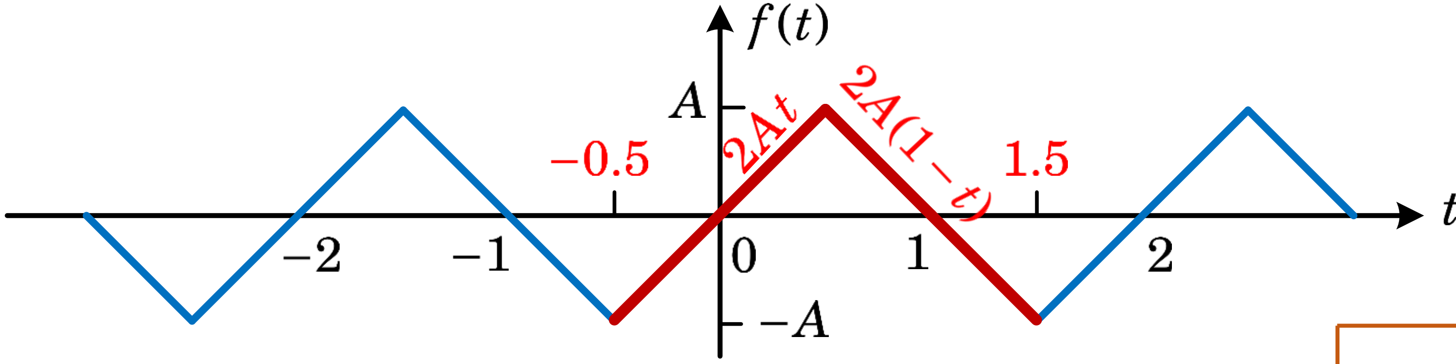
$\omega_0 = \pi$

解：$a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = 0$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-0.5}^{1.5} f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_{-0.5}^{0.5} 2At\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t + \frac{2}{T_0}\int_{0.5}^{1.5} 2A(1-t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

# 【例】求图示信号的三角形式Fourier级数展开表示式




$T_0 = 2$

$\omega_0 = \pi$

解：$a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = 0$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-0.5}^{1.5} f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = \frac{8A}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8A}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\pi t)$$

# 4.1-3 Fourier级数的收敛条件

- **Fourier系数部分和：**

$$f_N(t)=\sum_{n=-N}^{N} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

- **Fourier级数收敛：**

$$\lim_{N\to\infty} |f(t)-f_N(t)|=0$$

原信号不连续时，**Fourier**级数在间断点处不收敛，如矩形脉冲信号。

实际系统是对信号的能量作出响应

# 4.1-3 Fourier级数的收敛条件

- **Fourier系数部分和：**

$$f_N(t)=\sum_{n=-N}^{N} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

- 能量意义下的收敛

  均方误差

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{T_0}\left|f(t)-f_N(t)\right|^2 \mathrm{d}t=0$$

间断点处收敛于 $\dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$

- **Dirichlet条件**

实际信号大多满足**Dirichlet**条件

a) 信号 $f(t)$ 在周期内绝对可积：$\int_{<T_0>}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$

b) 信号 $f(t)$ 在周期内仅含有限个间断点，且间断点处信号值有限

c) 信号 $f(t)$ 在周期内仅含有限起伏，即有限个极大值、极小值点

# 4.1-3 Fourier级数的收敛条件

## □ Dirichlet条件的说明：

a) 保证Fourier系数存在 $C_n = \int_{<T_0>} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \mathrm{d}t$

$$f(t) = \frac{1}{t-k},\ k < t \leqslant k+1,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$T_0 = 1 \qquad k = 0 \qquad \int_0^1 \frac{1}{t} \mathrm{d}t = -\ln 0 = \infty$$

b) 无穷多间断点，间断点导致的误差积分(面积)不一定为0

c) 无穷起伏变化：高频分量对应的Fourier系数衰减较慢

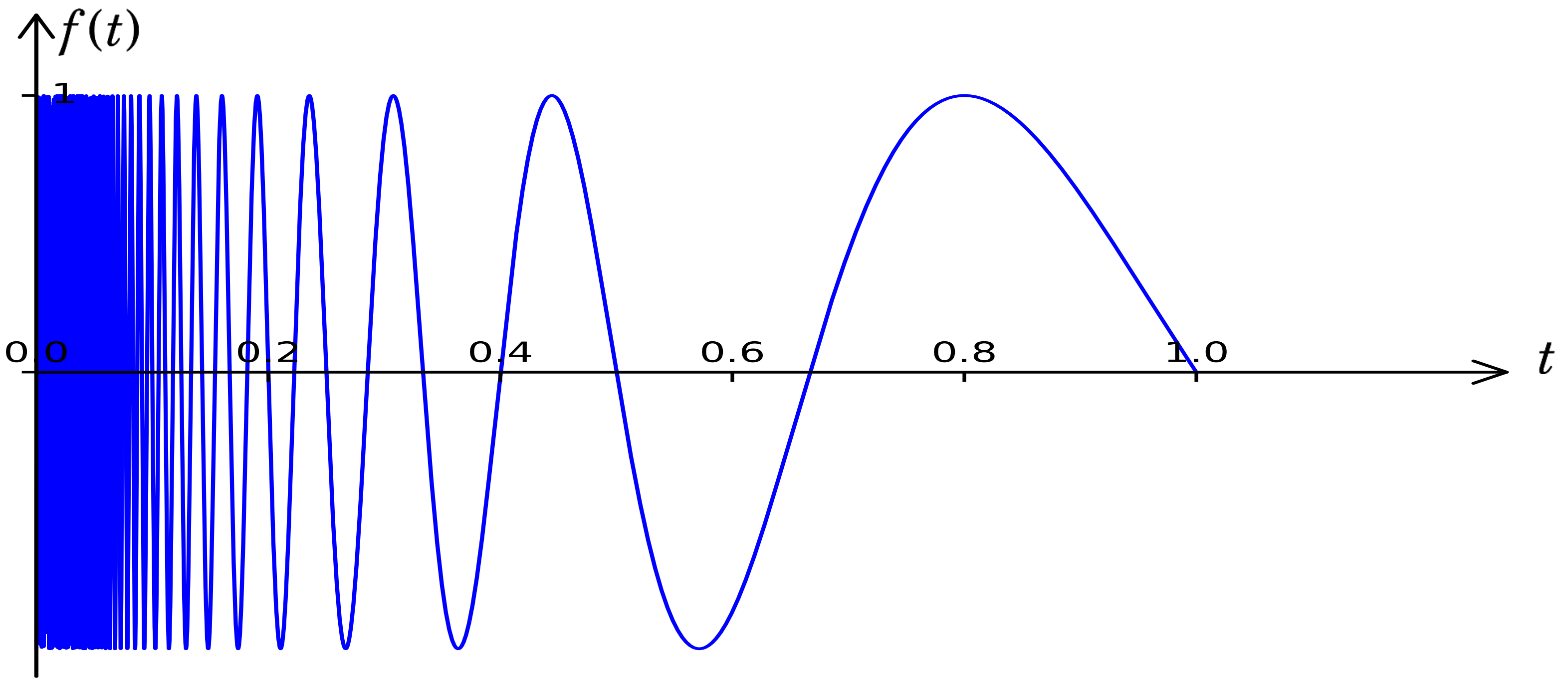
$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t-k}\right),\ k < t \leqslant k+1,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

# 4.1-3 Fourier级数的收敛条件

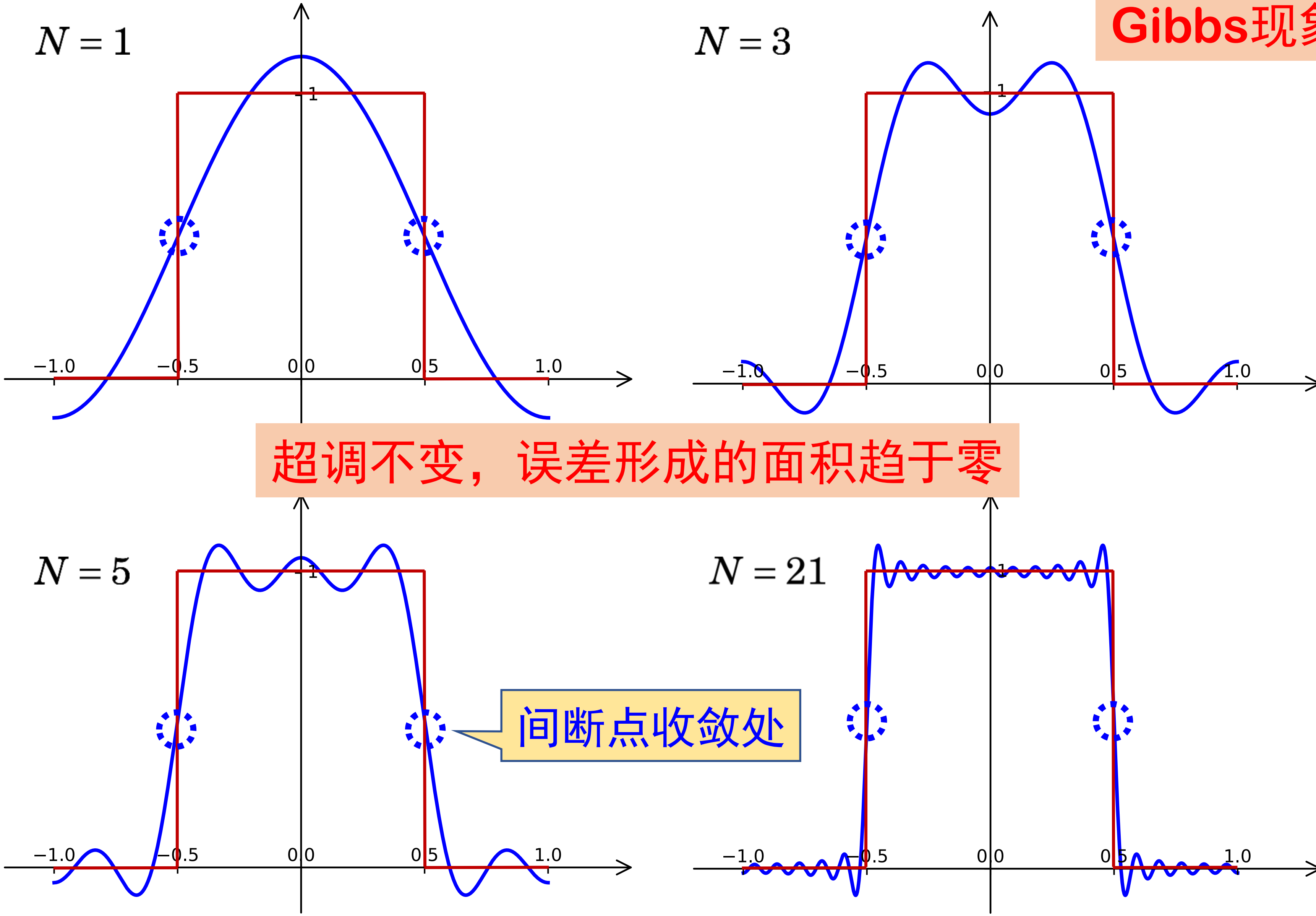
## □ Dirichlet条件的说明：

c) 无穷起伏变化：高频分量对应的Fourier系数衰减较慢

$$f(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{t-k}\right),\ k<t\leqslant k+1,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$



# Gibbs现象

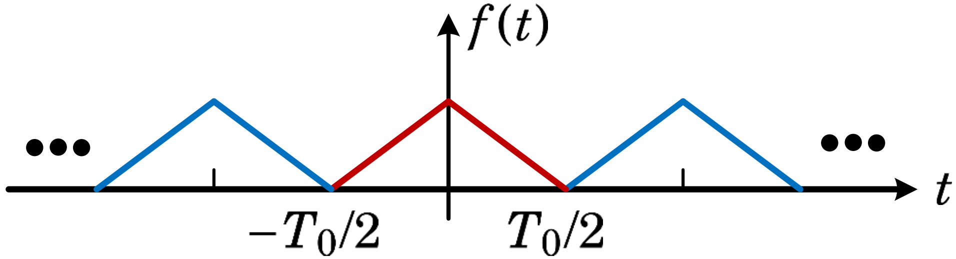



超调不变，误差形成的面积趋于零

# 4.1-4 信号的对称性与Fourier系数的关系

## ◻ 偶对称信号(纵轴对称信号)

$$f(t)=f(-t)$$




$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left[\overset{\text{偶}}{\boxed{f(t)\cos(n\omega_0 t)}}-\mathrm{j}\,\cancel{\overset{\text{奇}}{\boxed{f(t)\sin(n\omega_0 t)}}}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}a_n$$

$$\boxed{f(t)=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)}$$

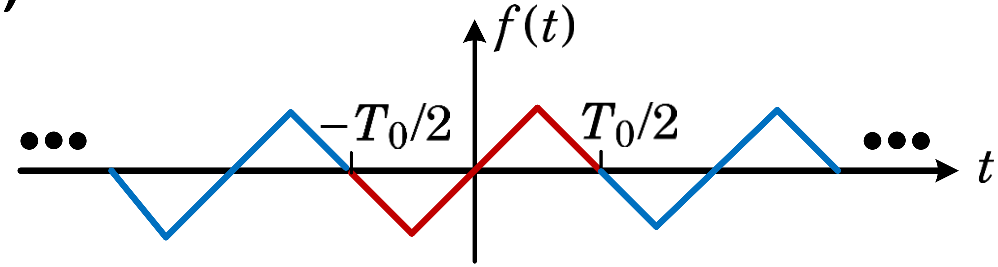
$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)$$

直流项+余弦项

# 4.1-4 信号的对称性与Fourier系数的关系

## □ 奇对称信号(原点对称信号)

$$f(t) = -f(-t)$$




$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

奇　　　　偶

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\left[\cancel{\boxed{f(t)\cos(n\omega_0 t)}} - \mathrm{j}\boxed{f(t)\sin(n\omega_0 t)}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\mathrm{j}}{2}b_n$$

$$\boxed{f(t) = C_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right)}$$

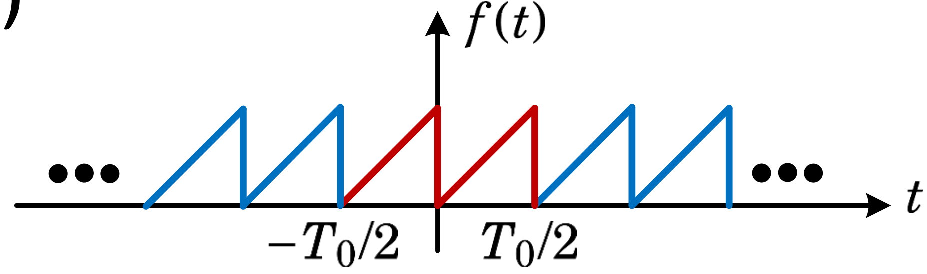
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

正弦项

# 4.1-4 信号的对称性与Fourier系数的关系

- 半波重叠信号(半波也是周期)

$$f(t) = f(t \pm T_0/2)$$




$$T_1 = T_0/2,\quad \omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\omega_0$$

$$C_n = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)e^{-\mathrm{j}2n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

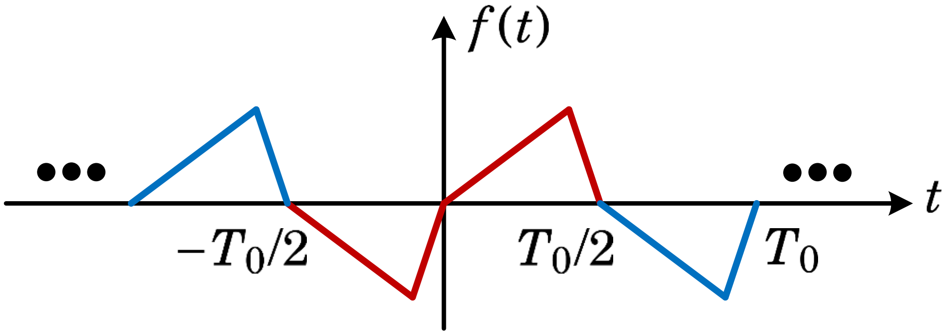
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}2n\omega_0 t}$$

仅含偶次谐波分量

# 4.1-4 信号的对称性与Fourier系数的关系

## □ 半波镜像信号

$$f(t) = -f(t \pm T_0/2)$$




$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant t < T_0/2 \\ 0, & T_0/2 \leqslant t \leqslant T_0 \end{cases}$$

$$f(t) = f_1(t) - f_1(t - T_0/2)$$

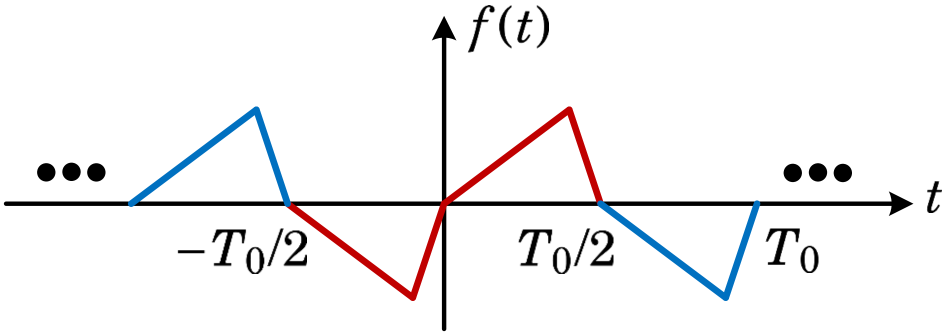
$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

时移特性

$$f_1(t - T_0/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\pi} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (-1)^n e^{jn\omega_0 t}$$

# 4.1-4 信号的对称性与Fourier系数的关系

## □ 半波镜像信号




$$f(t) = -f(t \pm T_0/2)$$

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

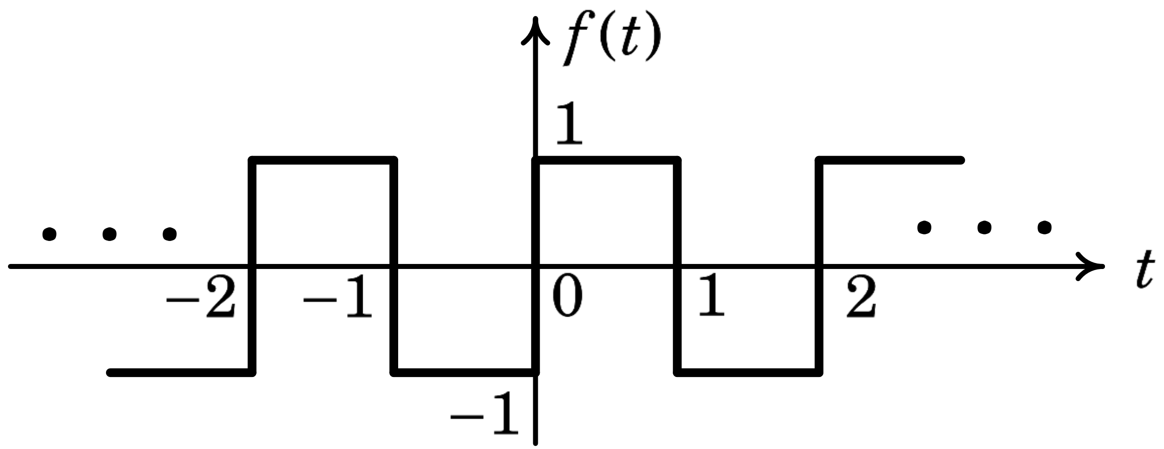
$$f_1(t - T_0/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\pi} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (-1)^n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = f_1(t) - f_1(t - T_0/2) = 2\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\text{为奇}}}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

仅含奇次谐波分量

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_1(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

【练习】求如下图所示周期信号的 Fourier 级数。



# §4.2 连续周期信号的频谱分析

1. 频谱：幅度频谱、相位频谱
2. 有效带宽
3. 功率谱

# 4.2-1 周期信号的频谱

## 周期信号的Fourier级数表示

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad C_n=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

- 虚指数信号线性组合，虚指数信号的角频率是基波角频率的整数倍
- Fourier级数形式相同，不同的是Fourier系数
- Fourier系数反映信号中各次谐波的幅度值和相位值，所以称**Fourier系数为信号的频谱**

## 周期信号的频谱

$$C_n=|C_n|e^{j\varphi_n}$$

幅度谱　相位谱

$f(t)$实函数：

- 幅度谱偶对称
- 相位谱奇对称

# 4.2-1 周期信号的频谱

- 对于某个 $n$，谐波表示为

$$C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = |C_n| e^{\mathrm{j}\varphi_n} e^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = |C_n| e^{\mathrm{j}(n\omega_0 t+\varphi_n)}$$

- 实信号 Fourier 系数共轭对称

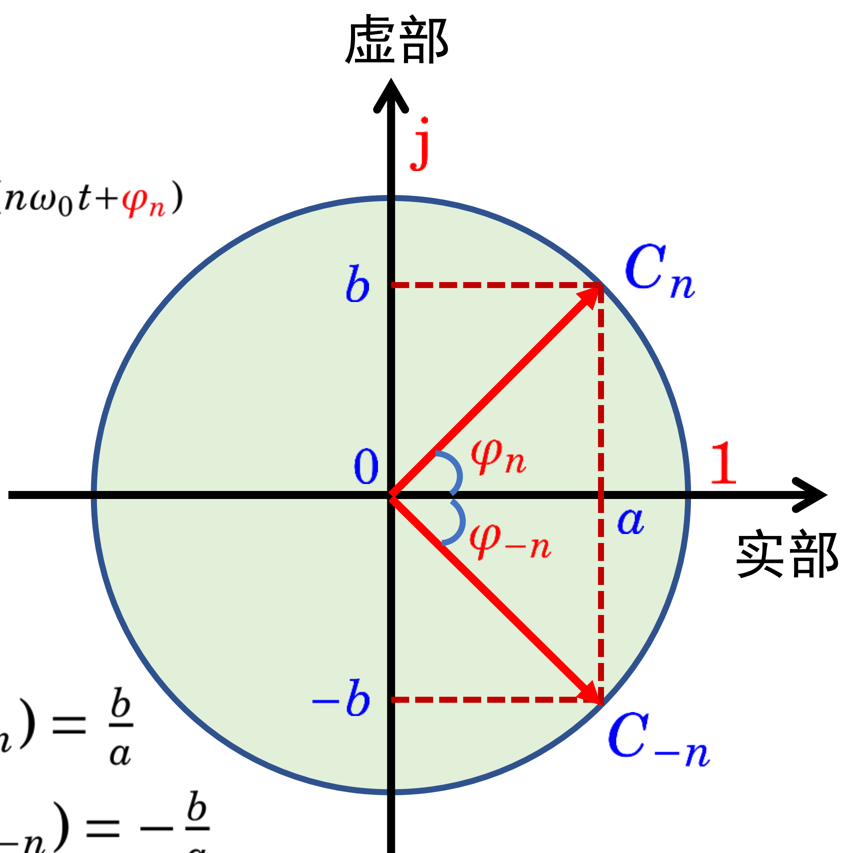
$$C_n^* = C_{-n}$$

$$C_n = a + \mathrm{j}b$$

$$C_{-n} = a - \mathrm{j}b$$

$$|C_{-n}| = |C_n| = \sqrt{a^2+b^2}$$

- 幅度谱偶对称




$$\tan(\varphi_n) = \frac{b}{a}$$

$$\tan(\varphi_{-n}) = -\frac{b}{a}$$

$$\varphi_{-n} = \arctan(-\tfrac{b}{a}) = -\arctan(\tfrac{b}{a}) = -\varphi_n$$

- 相位谱奇对称

# 4.2-1 周期信号的频谱

【例】画出周期信号 $f(t)=1+\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t+\frac{\pi}{3})$ 的频谱

解：欧拉公式：$\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$

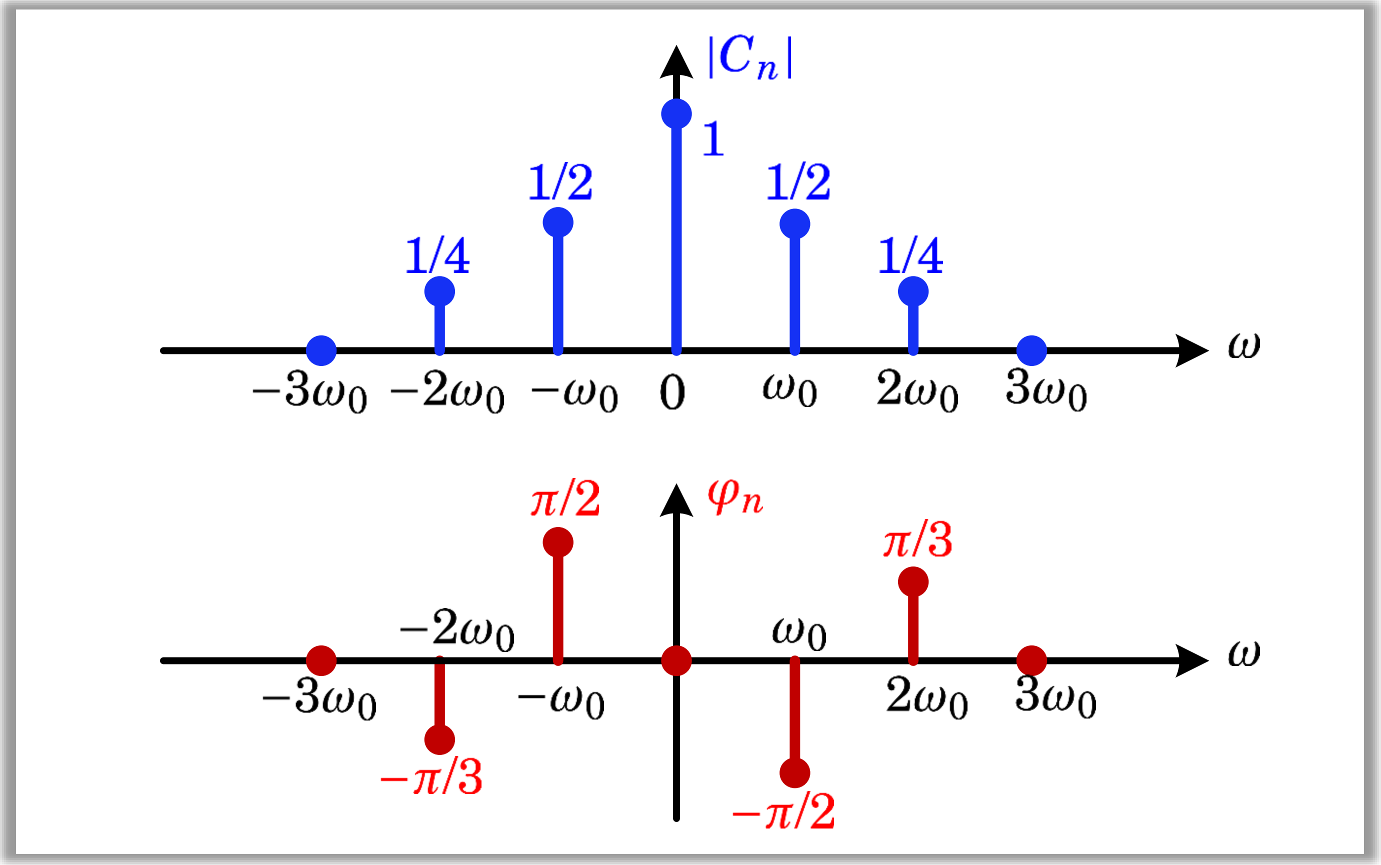
$$f(t)=1+\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{j}(\omega_0 t-\pi/2)}+e^{-\mathrm{j}(\omega_0 t-\pi/2)}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{\mathrm{j}(2\omega_0 t+\pi/3)}+e^{-\mathrm{j}(2\omega_0 t+\pi/3)}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{j}\pi/2}e^{\mathrm{j}\omega_0 t}+e^{\mathrm{j}\pi/2}e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{\mathrm{j}\pi/3}e^{\mathrm{j}2\omega_0 t}+e^{-\mathrm{j}\pi/3}e^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right)$$

# 4.2-1 周期信号的频谱

【例】画出周期信号 $f(t)=1+\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t+\frac{\pi}{3})$ 的频谱

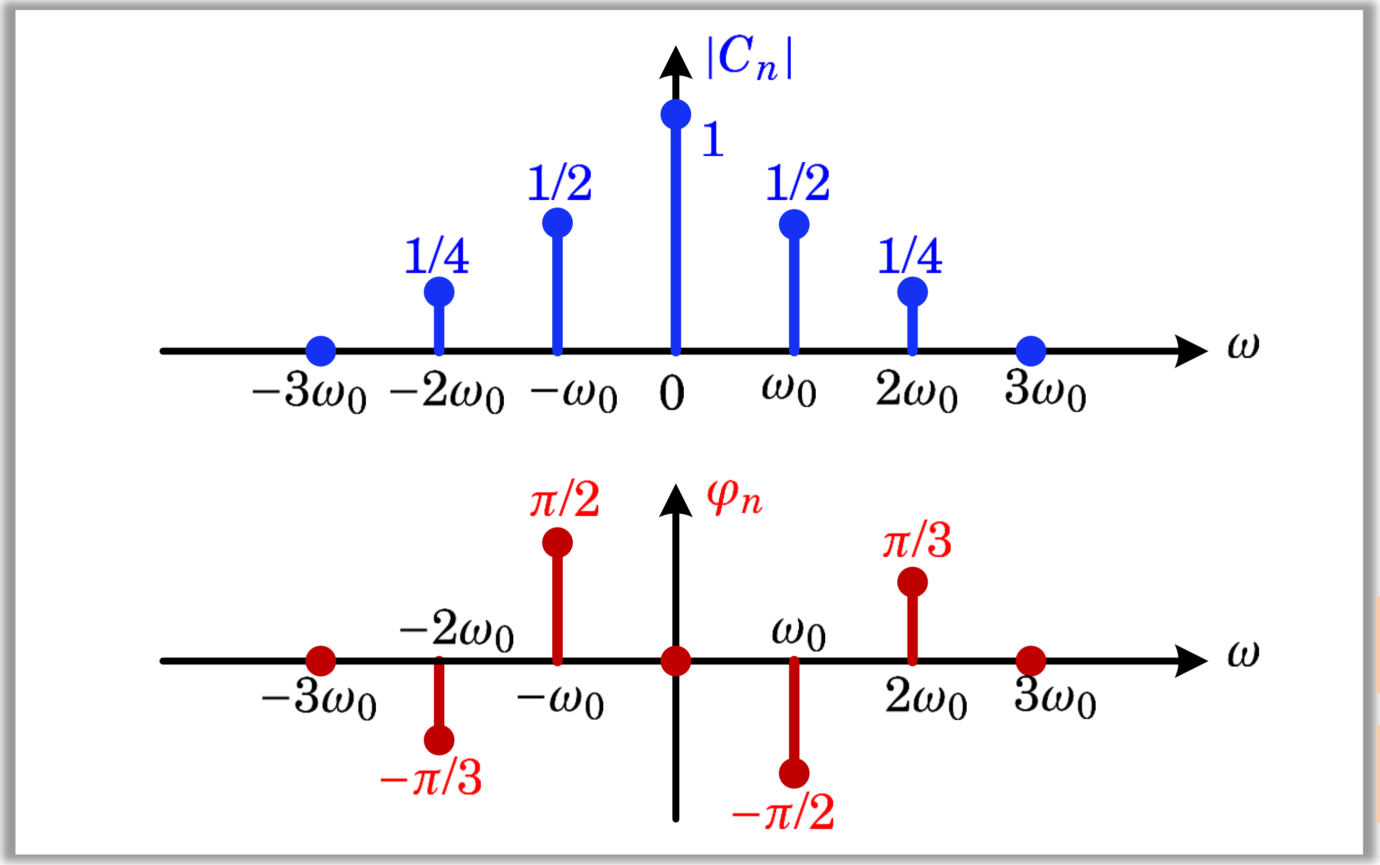
$$f(t)=1+\frac{1}{2}\left(e^{-j\pi/2}e^{j\omega_0 t}+e^{j\pi/2}e^{-j\omega_0 t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{j\pi/3}e^{j2\omega_0 t}+e^{-j\pi/3}e^{-j2\omega_0 t}\right)$$



# 4.2-1 周期信号的频谱

【例】画出周期信号 $f(t)=1+\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t+\frac{\pi}{3})$ 的频谱

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\left(e^{-j\pi/2}e^{j\omega_0 t}+e^{j\pi/2}e^{-j\omega_0 t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{j\pi/3}e^{j2\omega_0 t}+e^{-j\pi/3}e^{-j2\omega_0 t}\right)$$

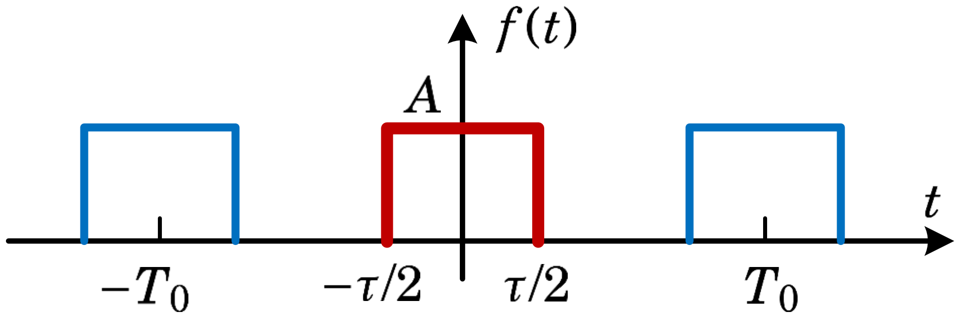



频谱重建信号

信号频域描述

# 4.2-1 周期信号的频谱

【例】画出图示周期信号的频谱




$$f_0(t)=\begin{cases}A, & |t|\leqslant \tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$

$$C_n=\frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

实数

$$C_n=|C_n|e^{\mathrm{j}\varphi_n}$$

$$=|C_n|(\cos(\varphi_n)\cancel{-\mathrm{j}\sin(\varphi_n)})$$

| | | |
|---|---|---|
| | $C_n>0$ | $C_n<0$ |
| | $\cos(\varphi_n)=1$ | $\cos(\varphi_n)=-1$ |
| 相位 | $\varphi_n=0$ | $\varphi_n=\pm\pi$ |

$$C_n=0$$

$$\frac{n\omega_0\tau}{2}=n\pi$$

$$n\omega_0=\frac{n2\pi}{\tau}$$

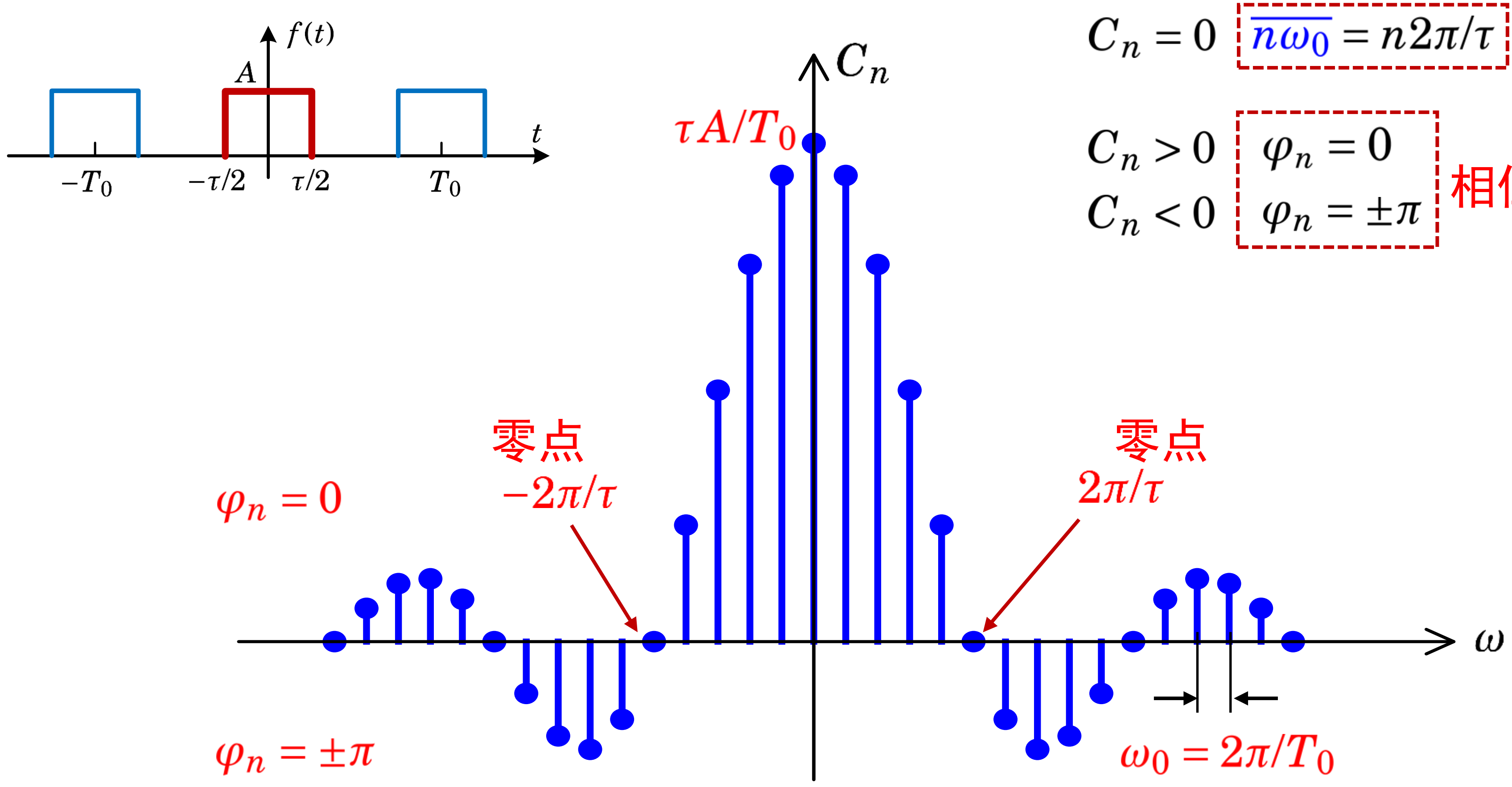
# 4.2-1 周期信号的频谱

【例】画出图示周期信号的频谱

$$C_n = \frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

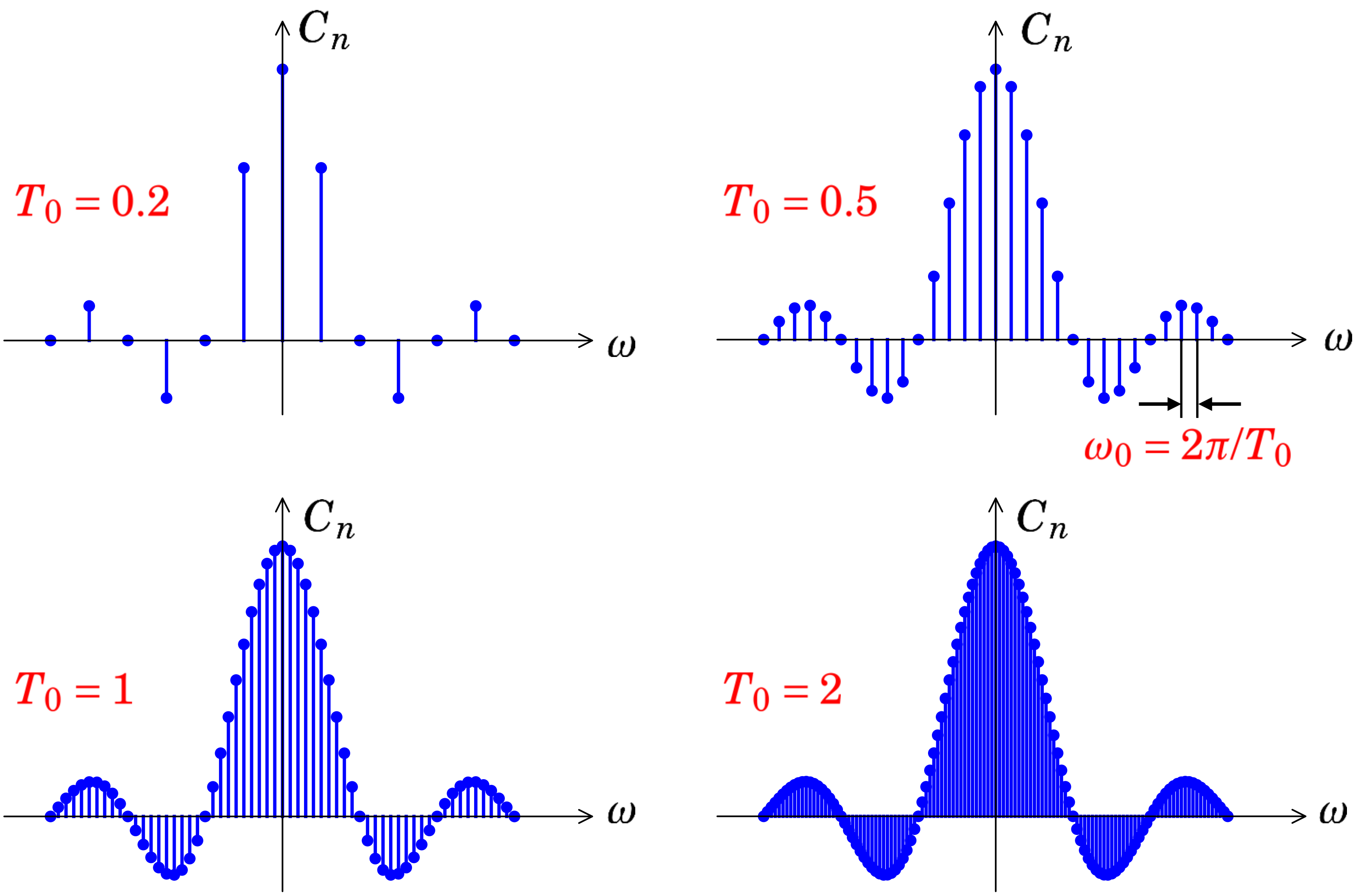
$C_n = 0$ $\boxed{n\omega_0 = n2\pi/\tau}$ 零点

$C_n > 0$ $\varphi_n = 0$
$C_n < 0$ $\varphi_n = \pm\pi$ 相位




Cn为实数时，可将幅度谱与相位谱画在同一图中

# 4.2-2 周期信号频谱的特性



# 4.2-2 周期信号频谱的特性

## 离散频谱特性

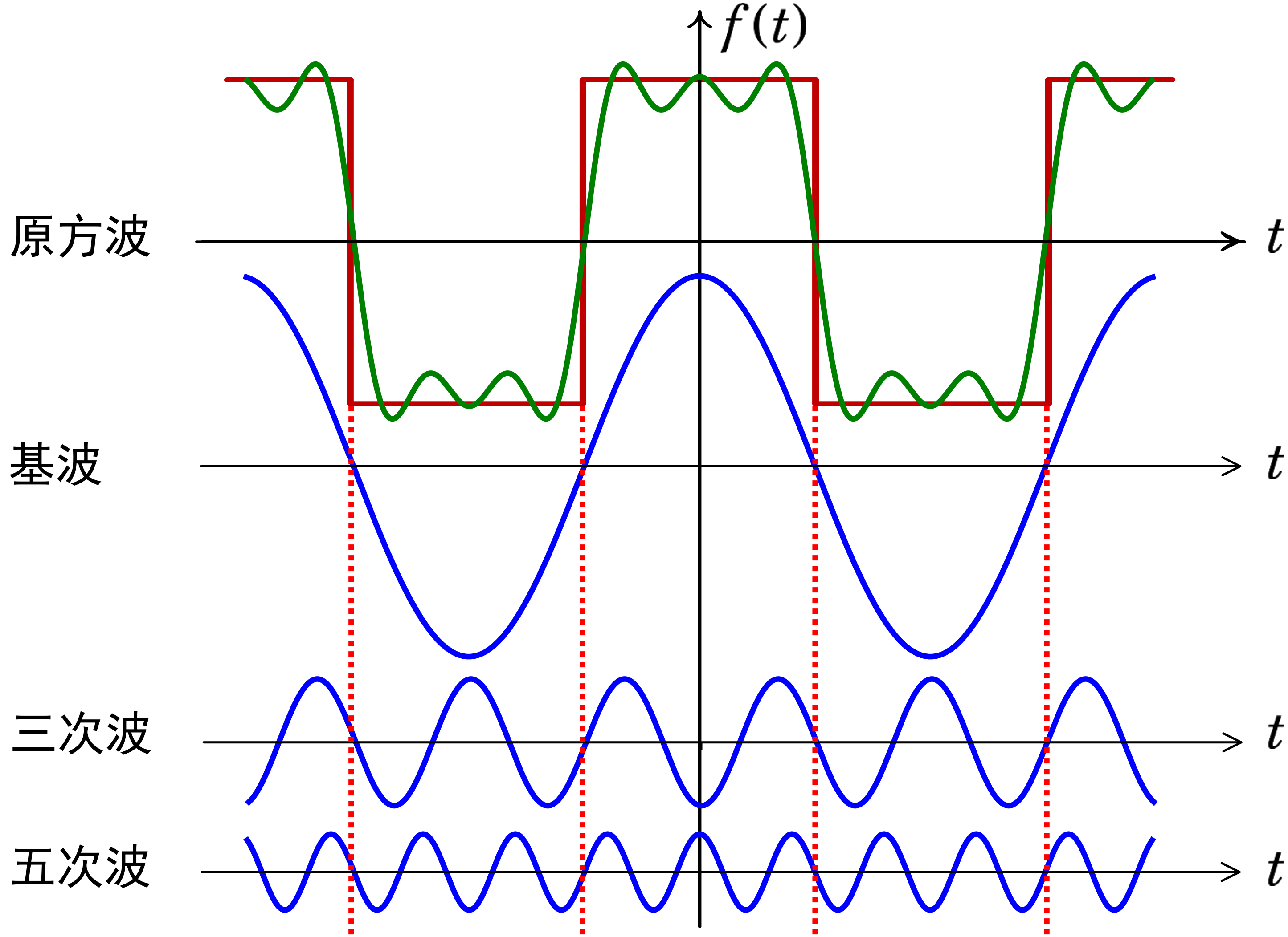
- 间隔为$\omega_0$的离散谱线组成
- 周期越大，谱线越密 $(\omega_0 = 2\pi/T_0)$

## 幅度衰减特性：$n\omega_0$增大，$|C_n|$ 衰减

- $f(t)$在间断点幅度有界，$|C_n|$ 的衰减速度 $1/n$
- $f(t)$连续，一阶导数间断点幅度有界，$|C_n|$的衰减速度 $1/n^2$
- $f(t)$前$k-1$阶导数连续，$k$ 阶导数间断点幅度有界，$|C_n|$ 的衰减速度$1/n^k$

# 4.2-3 相位谱的作用

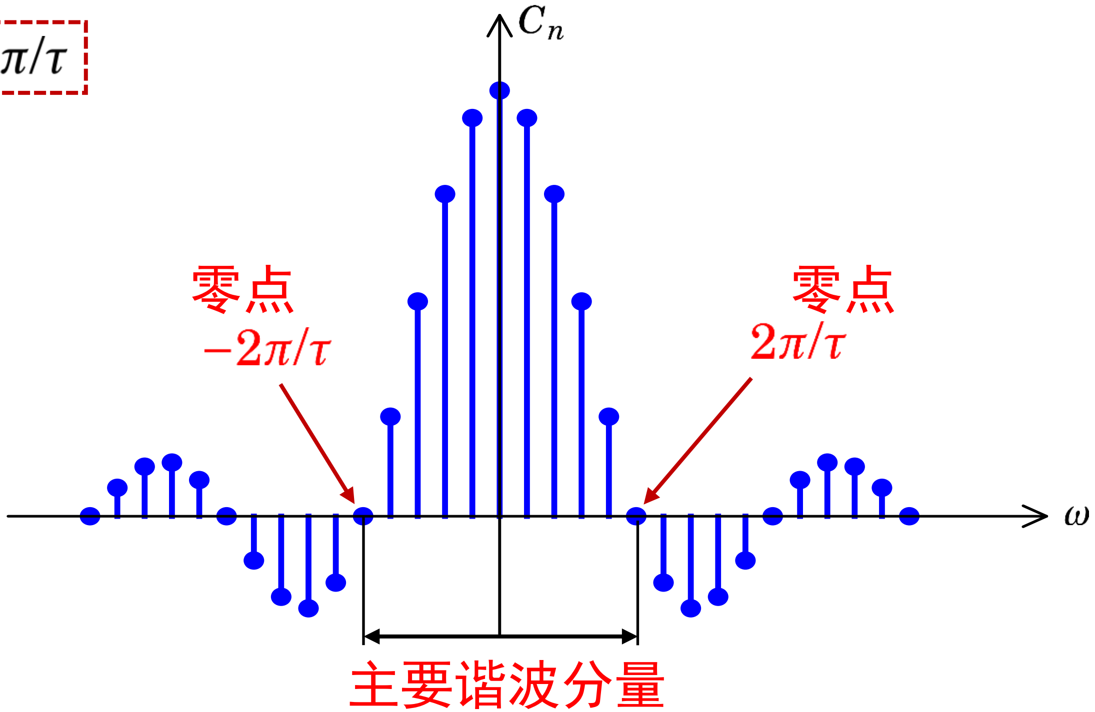
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left\{\cos(0.5\pi t)+\frac{1}{3}\cos(1.5\pi t+\pi)+\frac{1}{5}\cos(2.5\pi t)+\cdots\right\}$$



# 4.2-4 信号的有效带宽

$C_n = 0$ $\boxed{\overline{n\omega_0} = n2\pi/\tau}$

零点




- **有效频带宽度**：包含主要谐波分量的角频率范围 $0 \sim 2\pi/\tau$

$\omega_B = 2\pi/\tau\ (\text{rad/s})$

$f_B = 1/\tau\ (\text{Hz})$

- 信号时域持续时间越长，有效带宽越小
- 信号有效带宽与系统有效带宽必须匹配

# 4.2-5 周期信号的功率谱

- 周期信号是功率信号
- 周期信号 $f(t)$ 在 $1\,\Omega$ 电阻上消耗的平均功率 $P$

$$\boxed{P=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}|f(t)|^2\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f^*(t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f^*(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f^*(t)e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\left[\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]^*$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n C_n^*$$

$$\boxed{=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2}$$

**Parseval功率守恒定理**

# 4.2-5 周期信号的功率谱

- 功率谱定义：$|C_n|^2$ 随频率 $n\omega_0$ 的分布特性

$$P=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2=C_0^2+\sum_{n=-\infty}^{-1}|C_{-n}^*|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2$$

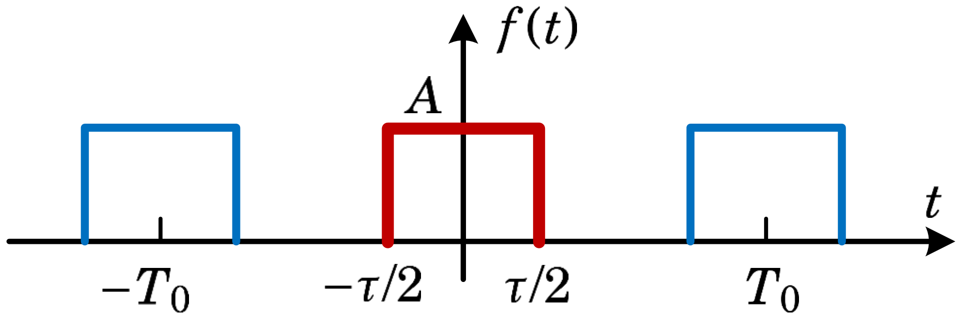
$$=C_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2$$

任意周期信号的平均功率 = 信号所包含的直流、基波及各次谐波的平均功率之和

- 周期信号的功率谱也是离散频谱
- 由功率谱可知：
  - 各平均功率的分布情况
  - 周期信号有效带宽内谐波分量平均功率与总平均功率之比

# 4.2-5 周期信号的功率谱

【例】画出图示周期信号的功率谱，并计算有效带宽内谐波分量平均功率占比




$A = 1$

$T_0 = 1/4$

$\tau = 1/20$

解：

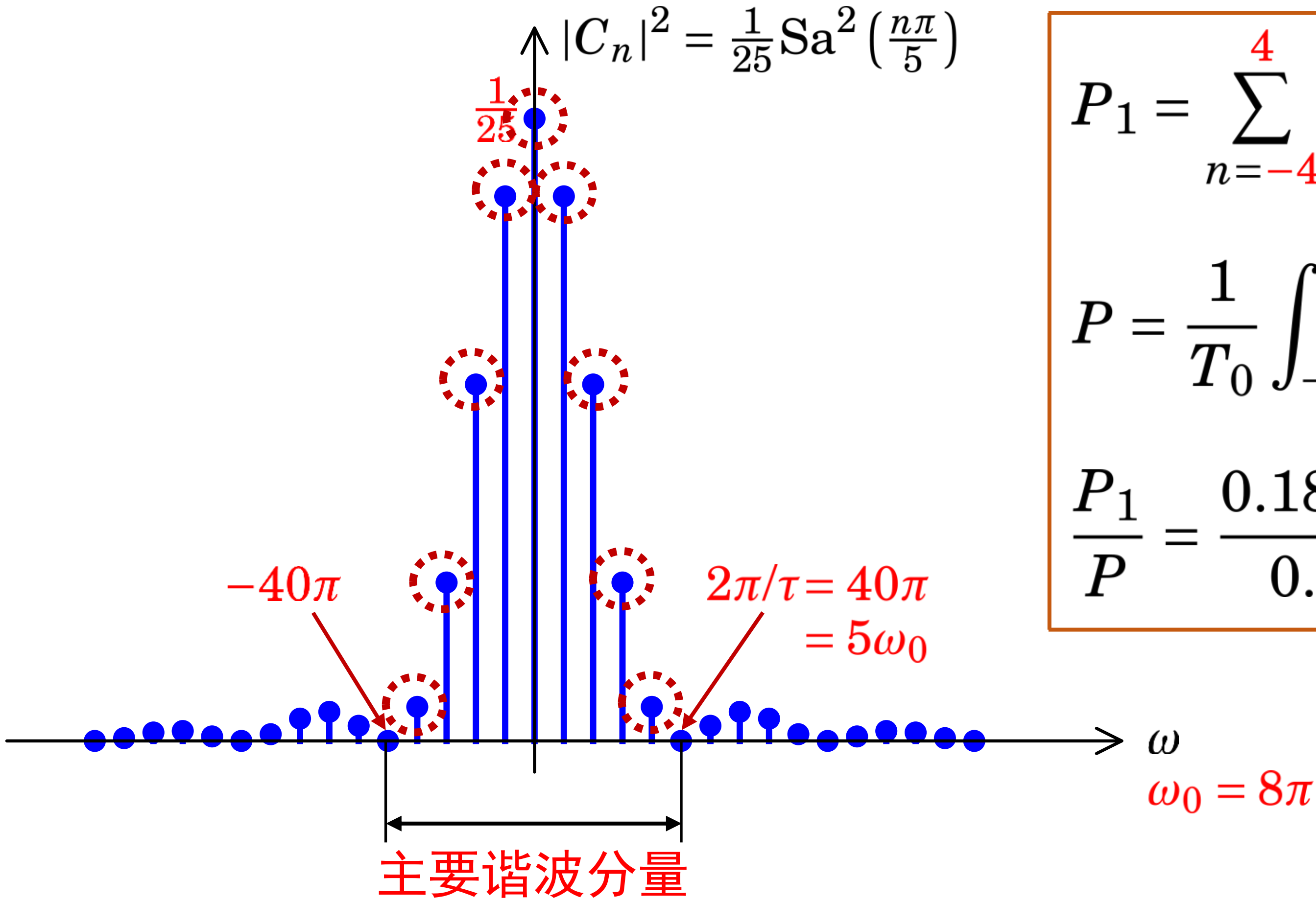
$$\omega_0 = 8\pi$$

$$C_n = \frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{1}{5}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

$$|C_n|^2 = \frac{1}{25}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{5}\right) \longrightarrow \text{功率谱}$$

# 4.2-5 周期信号的功率谱

【例】画出图示周期信号的功率谱，并计算有效带宽内谐波分量平均功率占比




$$P_1=\sum_{n=-4}^{4}|C_n|^2=0.1806$$

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=0.2$$

$$\frac{P_1}{P}=\frac{0.1806}{0.2}=90\%$$

# §4.3 连续时间Fourier级数的基本性质

$$T_0 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$f(t) \longleftrightarrow C_n$$

线性　时移　卷积　微分

# 4.3-1 Fourier级数基本性质

## 线性特性

$$f(t) \longleftrightarrow C_n$$

$$g(t) \longleftrightarrow D_n$$

周期均为 $T_0$

$$\alpha f(t)+\beta g(t) \longleftrightarrow \alpha C_n+\beta D_n$$

证明：

$$=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}[\alpha f(t)+\beta g(t)]e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$=\alpha\underbrace{\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t}}_{C_n}+\beta\underbrace{\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}g(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t}}_{D_n}$$

# 4.3-1 Fourier级数基本性质

## 时移特性

$$f(t) \longleftrightarrow C_n \quad \text{周期为 } T_0$$

$$f(t-t_1) \longleftrightarrow e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1} C_n$$

证明：

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(t-t_1)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

令 $t - t_1 = \tau$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0(\tau+t_1)}\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1}\boxed{\int_{<T_0>} f(\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 \tau}\mathrm{d}\tau} \quad C_n$$

# 4.3-1 Fourier级数基本性质

## 卷积特性

$$f(t) \longleftrightarrow C_n$$

$$g(t) \longleftrightarrow D_n$$

周期均为 $T_0$

$$\int_{<T_0>} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow T_0 C_n D_n$$

证明：

$$T_0 C_n D_n = T_0 \cdot \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0\tau}\mathrm{d}\tau \cdot \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} g(t_1)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1}\mathrm{d}t_1$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\int_{<T_0>} f(\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0\tau} g(t_1)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t_1$$

令 $t_1 = t - \tau$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\int_{<T_0>} f(\tau)g(t-\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

# 4.3-1 Fourier级数基本性质

## 卷积特性

$$f(t) \longleftrightarrow C_n$$

$$g(t) \longleftrightarrow D_n$$

周期均为 $T_0$

$$\int_{<T_0>} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow T_0 C_n D_n$$

**证明：**

$$T_0 C_n D_n = T_0 \cdot \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f(\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0\tau}\mathrm{d}\tau \cdot \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} g(t_1)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1}\mathrm{d}t_1$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\int_{<T_0>} f(\tau)e^{-\mathrm{j}n\omega_0\tau} g(t_1)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t_1$$

令 $t_1 = t-\tau$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} \boxed{\left[\int_{<T_0>} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]} \cdot e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

# 4.3-1 Fourier级数基本性质

## 微分特性

周期为 $T_0$

$$f(t) \longleftrightarrow C_n \quad\Downarrow\quad f'(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}n\omega_0 C_n$$

$$f'(t) \longleftrightarrow D_n \quad\Downarrow\quad f(t) \longleftrightarrow \frac{D_n}{\mathrm{j}n\omega_0},\quad n \neq 0$$

直流分量除外

证明：

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f'(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

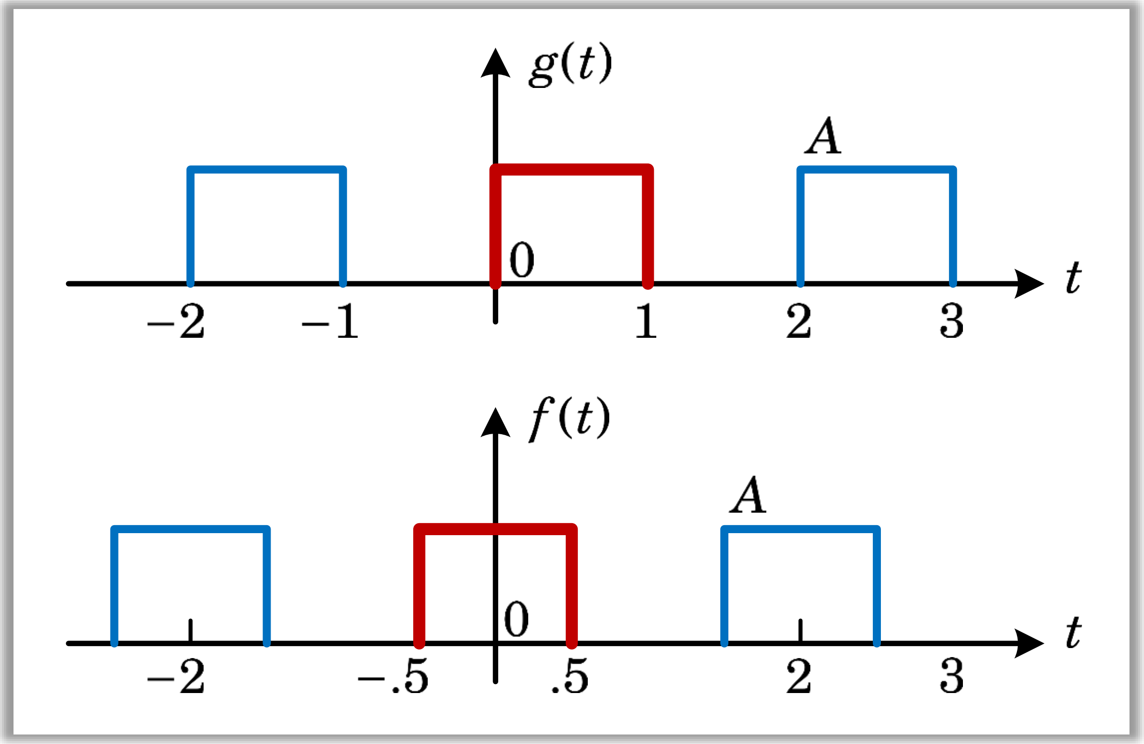
$$= \frac{1}{T_0}\left(\underbrace{\boxed{f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\Big|_0^{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}}}}_{}^{0} + \mathrm{j}n\omega_0\int_0^{T_0} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \mathrm{j}n\omega_0 \underbrace{\boxed{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t}}_{C_n}$$

# 4.3-1 Fourier级数基本性质

| Fourier级数基本性质 | | |
|---|---|---|
| 性质 | 周期信号 | Fourier系数 |
| 线性特性 | $af(t)+bg(t)$ | $aC_n+bD_n$ |
| 共轭特性 | $f^*(t)$ | $C_{-n}^*$ |
| 翻转特性 | $f(-t)$ | $C_{-n}$ |
| 时移特性 | $f(t-t_1)$ | $e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t_1}C_n$ |
| 频移特性 | $f(t)e^{\mathrm{j}M\omega_0 t}$ | $C_{n-M}$ |
| 卷积特性 | $\int_{<T_0>}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ | $T_0C_nD_n$ |
| 微分特性 | $f'(t)$ | $\mathrm{j}n\omega_0C_n$ |
| Parseval功率守恒 | $\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\lvert f(t)\rvert^2\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert C_n\rvert^2$ | |

# 【例】利用时移特性求图示信号的 Fourier 级数表示



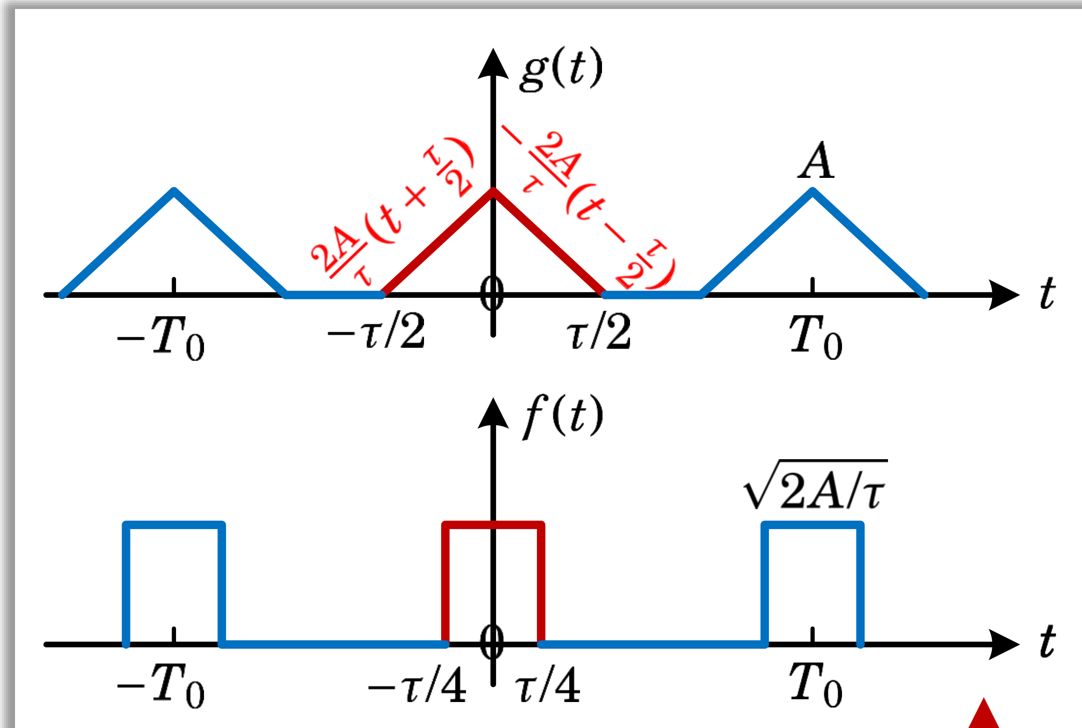

$$g(t)=f(t-0.5)$$

$$T_0=2$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\boxed{\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}_{C_n}e^{\mathrm{j}n\pi t}$$

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}n\pi/2}C_n e^{\mathrm{j}n\pi t}$$

# 【例】利用卷积特性求图示信号的 Fourier 级数表示




卷积的平移特性

$$u(t)*u(t)=r(t)$$

$$u(t+\tfrac{\tau}{4})*u(t+\tfrac{\tau}{4})=r(t+\tfrac{\tau}{2})$$

$$u(t-\tfrac{\tau}{4})*u(t-\tfrac{\tau}{4})=r(t-\tfrac{\tau}{2})$$

$$u(t+\tfrac{\tau}{4})*u(t-\tfrac{\tau}{4})=r(t)$$

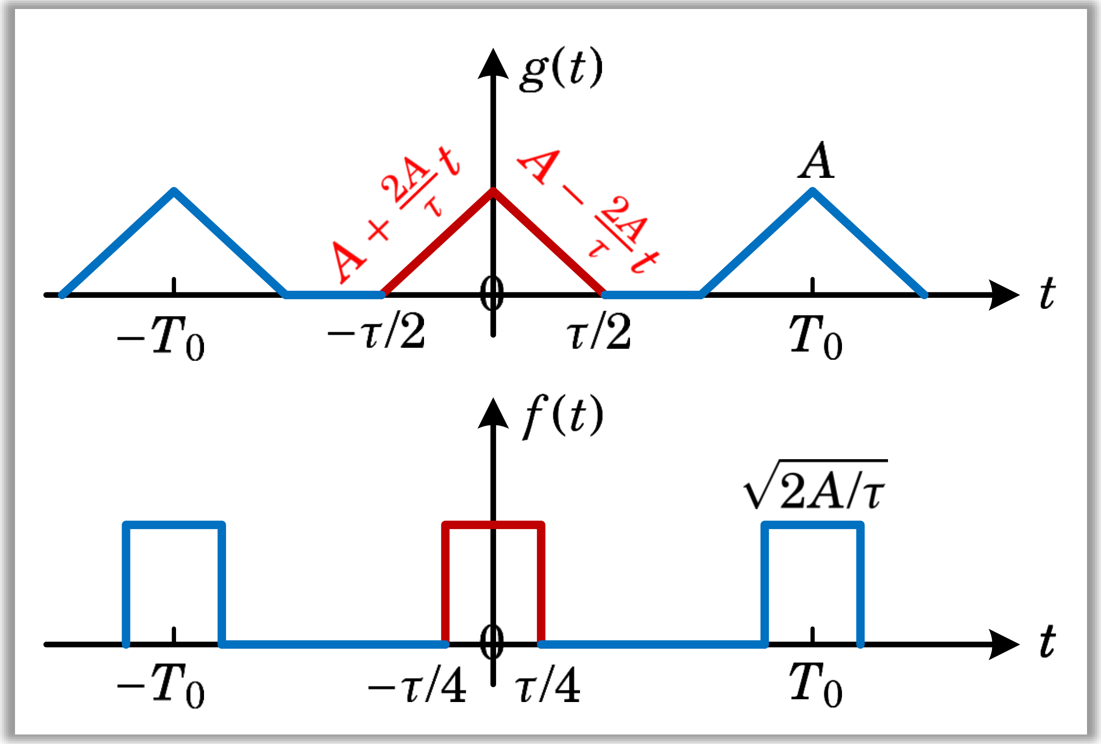
$$g(t)=f(t)*f(t)$$

$$g(t)=\frac{2A}{\tau}\left[r(t+\tfrac{\tau}{2})-2r(t)+r(t-\tfrac{\tau}{2})\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2A}{\tau}}\left[u(t+\tfrac{\tau}{4})-u(t-\tfrac{\tau}{4})\right]*\boxed{\sqrt{\frac{2A}{\tau}}\left[u(t+\tfrac{\tau}{4})-u(t-\tfrac{\tau}{4})\right]}$$

$f(t)$

# 【例】利用卷积特性求图示信号的 Fourier 级数表示




$$f(t) \longleftrightarrow C_n = \sqrt{\frac{2A}{\tau}}\frac{\tau}{2T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{4}\right)$$

$$g(t) = f(t) * f(t) \qquad g(t) \longleftrightarrow T_0C_n^2 = \frac{A\tau}{2T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{4}\right)$$

# 本章小结

- 连续时间信号的Fourier级数
- 连续时间Fourier级数的基本性质
- 连续周期信号的频谱分析
- 学习要求：

1. 掌握指数形式和三角形式Fourier级数及其证明，理解二者关系
2. 掌握Fourier级数基本性质及其应用
3. 掌握周期信号频谱的绘制，理解频谱恢复时域信号

   熟练信号的频域分析方法（有效带宽、功率谱）

# 附：第4次作业

- 第142-144页：

  4-2

  4-3：(2)，(4)

  4-6：(1)

  4-8