第5章 非周期信号的频域分析

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | https://sslic.cn/ss

本章主要内容

- 连续非周期信号的频谱
- 常见连续信号的频域分析
- 连续时间Fourier变换的性质

§5.1 连续非周期信号的频谱

周期信号的频谱（回顾）

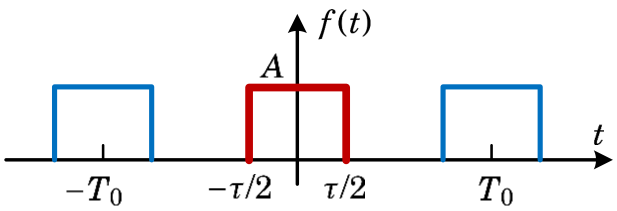
【例】画出图示周期信号的频谱

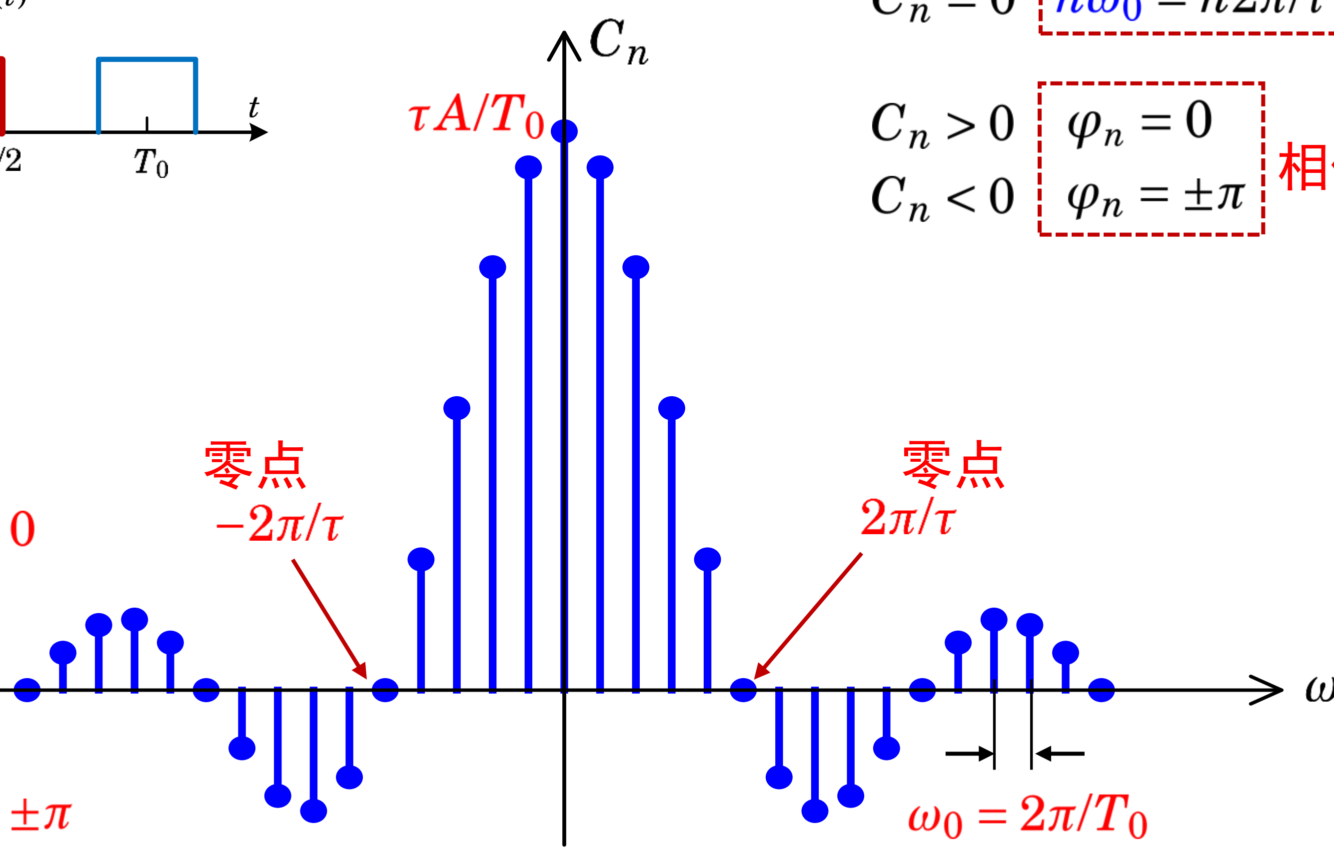
$$C_n = \frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

$C_n = 0$　$n\omega_0 = n2\pi/\tau$　零点

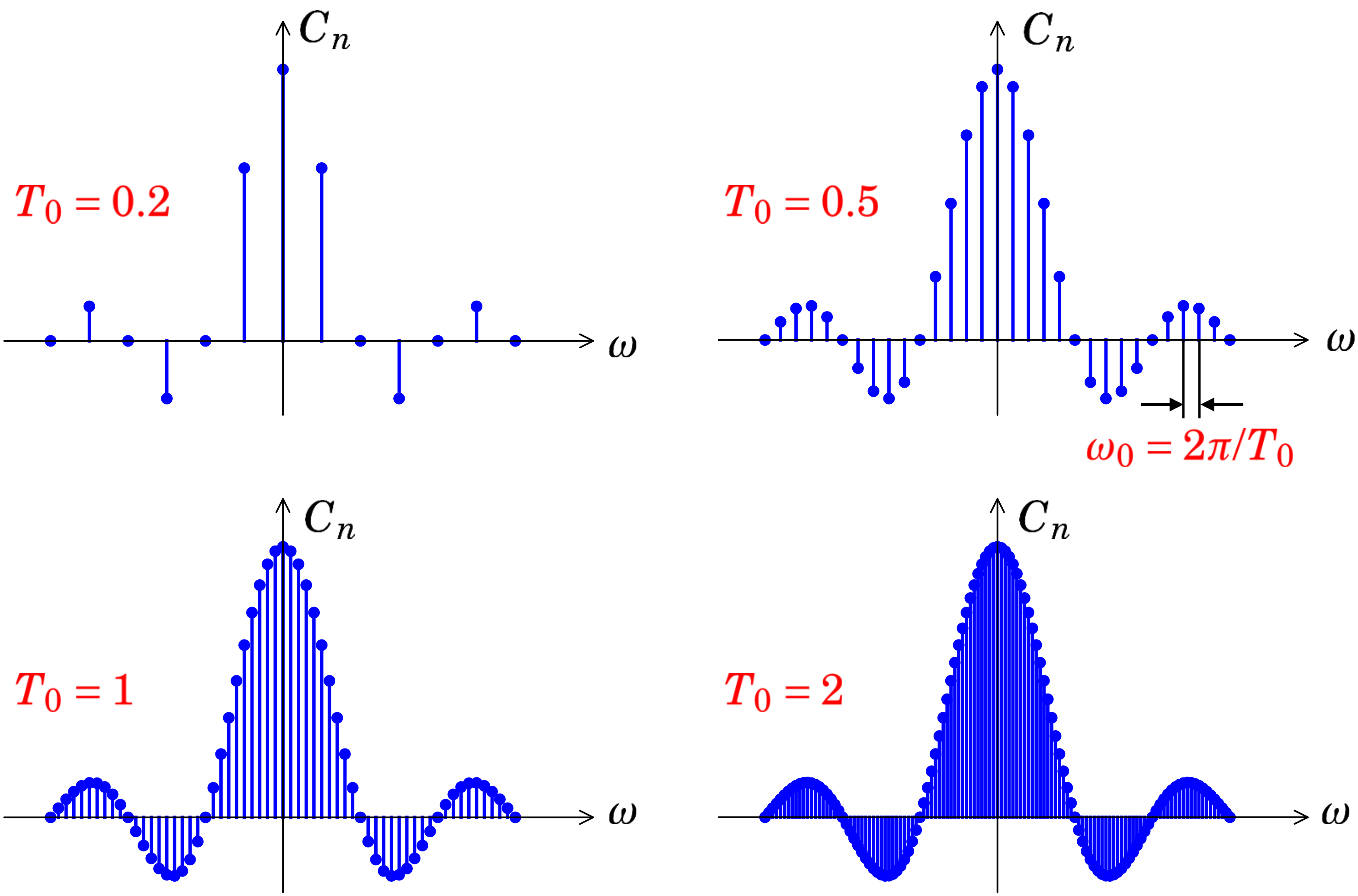
$C_n > 0$　$\varphi_n = 0$

$C_n < 0$　$\varphi_n = \pm\pi$　相位





周期信号的频谱（回顾）



5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

周期信号Fourier级数

$$f_{T_0}(t)$$

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

非周期信号

$$f(t) = \lim_{T_0\to\infty} f_{T_0}(t)$$

$$f(t) = \lim_{T_0\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$C_n = \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

避免 $C_n \to 0$

$$D_n = T_0 C_n$$

5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

周期信号Fourier级数

$f_{T_0}(t)$

$$f_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$T_0\to\infty$

非周期信号

$f(t)$　　$D_n=T_0 C_n$

$$f_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D_n}{T_0} e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$D_n=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_{T_0}(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

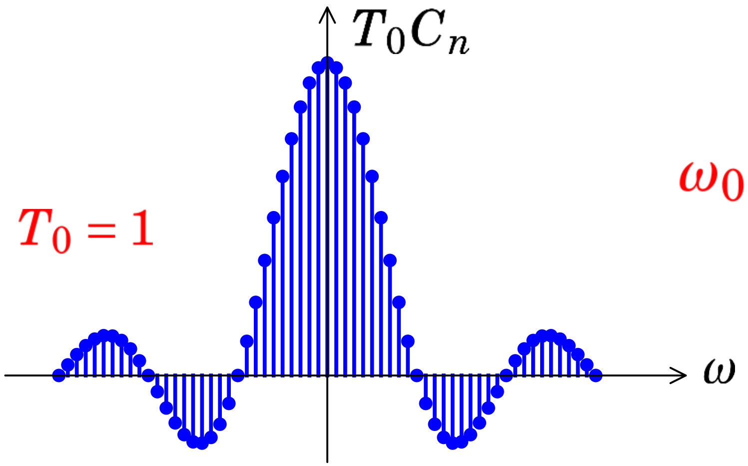
从周期到非周期？

5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

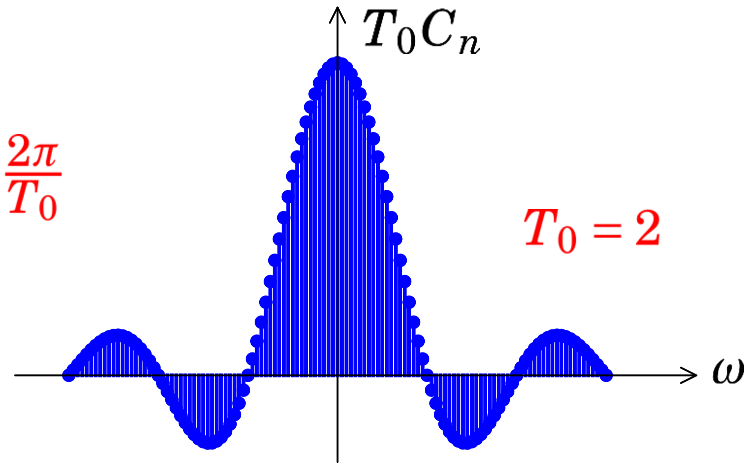
- 已知周期矩形脉冲信号的**Fourier**系数 $C_n = \frac{\tau A}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$

$$D_n = T_0 C_n = \tau A \mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = \tau A \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

($n\omega_0 = \omega$)



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$



$T_0 \to \infty$时，谱线间隔$\omega_0 \to 0$，离散频谱变为连续频谱

$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T_0\to\infty} D_n = \lim_{T_0\to\infty} T_0 C_n = \tau A \mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$$

ω 连续取值

5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

- 任意周期信号的频谱分布形状不同，但谱线间隔均为 ω_0

$$T_0 \to \infty \;\Rightarrow\; \Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T_0 \to 0$$

- 非周期信号时，ω 为连续量

Fourier正变换

$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T_0\to\infty} D_n = \lim_{T_0\to\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \lim_{T_0\to\infty} f_{T_0}(t) = \lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{D_n}{T_0}e^{\mathrm{j}\omega t} = \lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{D_n}{2\pi}\Delta\omega e^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Fourier反变换

$$T_0 = 2\pi/\Delta\omega$$
$$T_0 \to \infty$$
$$\Delta\omega \to 0$$

5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

- 任意周期信号的频谱分布形状不同，但谱线间隔均为 ω_0

$$T_0 \to \infty \;\Rightarrow\; \Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T_0 \to 0$$

- 非周期信号时，ω 为连续量

Fourier正变换

$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T_0\to\infty} D_n = \lim_{T_0\to\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \lim_{T_0\to\infty} f_{T_0}(t) = \lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{D_n}{T_0}e^{\mathrm{j}\omega t} = \lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{D_n}{2\pi}\Delta\omega e^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\Delta\omega$$

Fourier反变换

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$T_0 = 2\pi/\Delta\omega$

$T_0 \to \infty$

$\Delta\omega \to 0$

5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

Fourier变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]$$

- Fourier变换符号：$f(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}F(\mathrm{j}\omega)$

非周期信号的频谱函数

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

幅度谱　相位谱

$f(t)$实函数：

- 幅度谱偶对称
- 相位谱奇对称

5.1-1 连续时间非周期信号的Fourier变换

□ Fourier变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{2\pi}\Delta\omega\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$$

复振幅

□ 物理意义：非周期信号 $f(t)$ 可分解为无数个频率为 ω，复振幅为 $\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{2\pi}\mathrm{d}\omega$ 的虚指数信号 $e^{\mathrm{j}\omega t}$ 的线性组合

□ 非周期信号均可用Fourier反变换表示，仅系数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 不同

5.1-2 Fourier级数与Fourier变换比较

非周期信号Fourier变换

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

周期信号Fourier级数（回顾）

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} f_{T_0}(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \qquad f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

周期信号	非周期信号
离散频谱	连续频谱(频谱密度函数)
C_n的分布，每个谐波分量的复振幅	$F(\mathrm{j}\omega)$的分布，$\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{2\pi}\mathrm{d}\omega$表示各频率分量的复振幅
$C_n = \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{T_0}\Big\vert_{\omega=n\omega_0}$	$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T_0\to\infty} T_0 C_n$

5.1-3 Fourier变换的存在条件

- Fourier变换存在的充分条件：信号$f(t)$满足Dirichlet条件

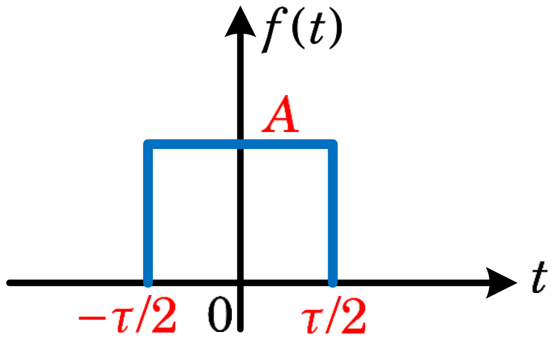
1. 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$
2. 任意区间，信号仅含有限个最大值和最小值
3. 任意区间，信号仅含有限个间断点，间断点信号值有界

充分而非必要条件，上述条件不成立时，仍可存在Fourier变换

例如：满足2-3的功率信号

【例】求图示非周期矩形脉冲信号的频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$。

解： $f(t)=\begin{cases} A, & |t|\leqslant \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$

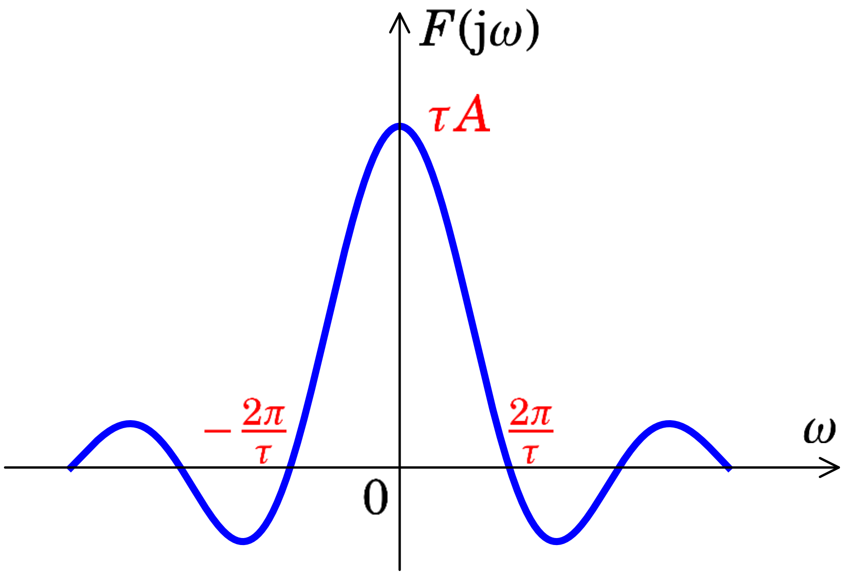


$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

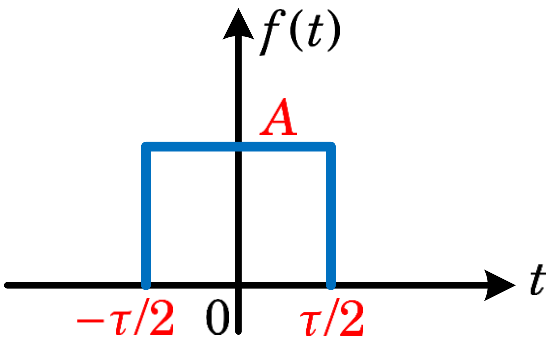
$$=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

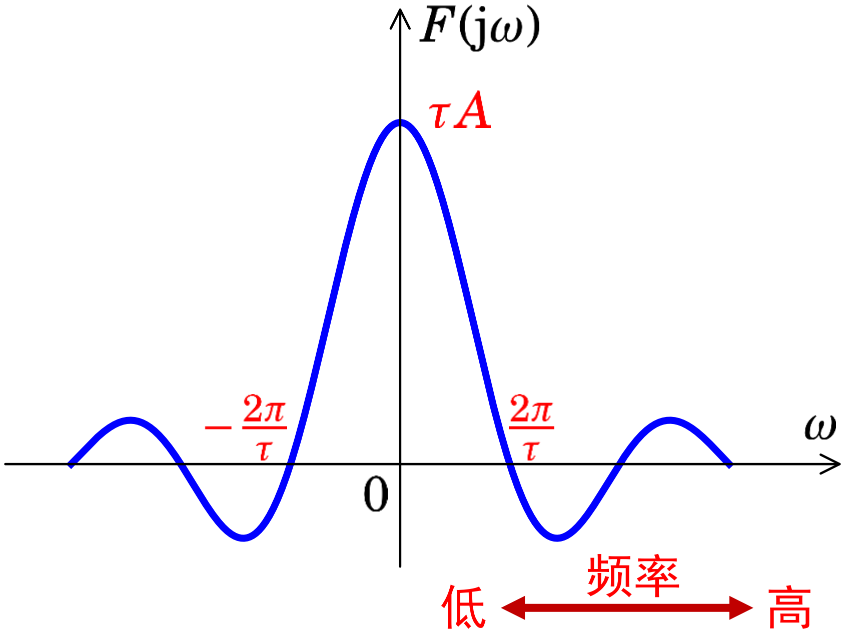
$$=2A\int_{0}^{\tau/2}\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\tau A\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$$



【例】求图示非周期矩形脉冲信号的频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$。





□ 结论：

- 连续频谱，形似周期信号的离散频谱包络线（等间隔取样）
- 时域持续时间有限，频域频谱无限延续
- 信号频谱分量主要集中于零频到过零点之间（有效带宽）
- 脉冲时域宽度和频域有效带宽互为倒数，脉宽越窄、有效带宽越宽、高频分量越多

$$\omega_{\mathrm{B}} = \frac{2\pi}{\tau}$$

§5.2 常见连续信号的频域分析

什么样的信号可以直接用定义求**Fourier**变换？

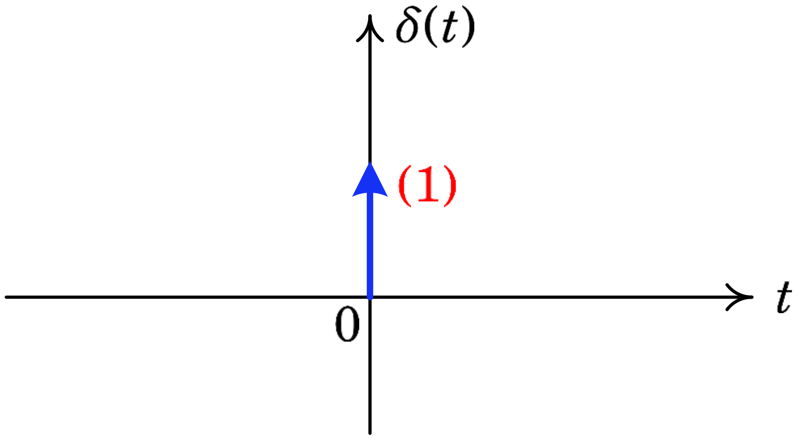
5.2-1 常见非周期信号的频谱

1. 单位冲激信号：$\delta(t)$

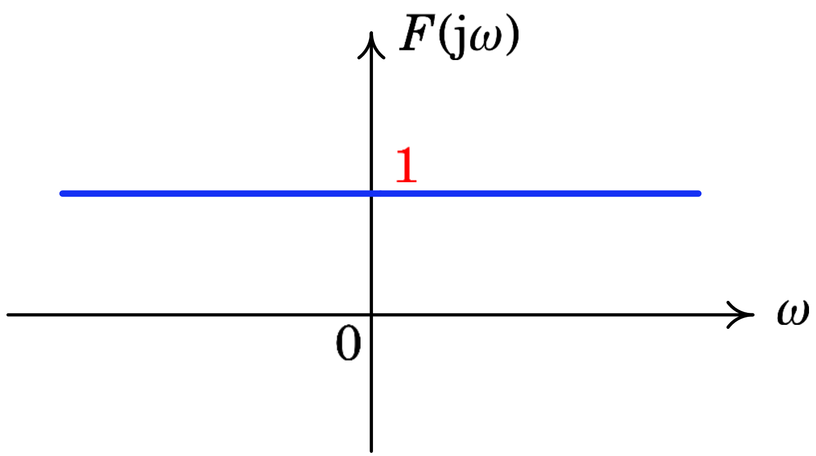
在 0 处 $\delta(t)$ 非有界

Dirichlet条件 ✗

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \overset{\text{取样}}{=\!=\!=} 1$$



单位冲激信号



频谱函数

5.2-1 常见非周期信号的频谱

2. 直流信号： $f(t)=1,\quad t\in\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|1|\mathrm{d}t=\infty$$

Dirichlet条件 ✗

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[1]=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$?

已知 $F_\delta(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=1$

Fourier反变换 $\delta(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}t\omega}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

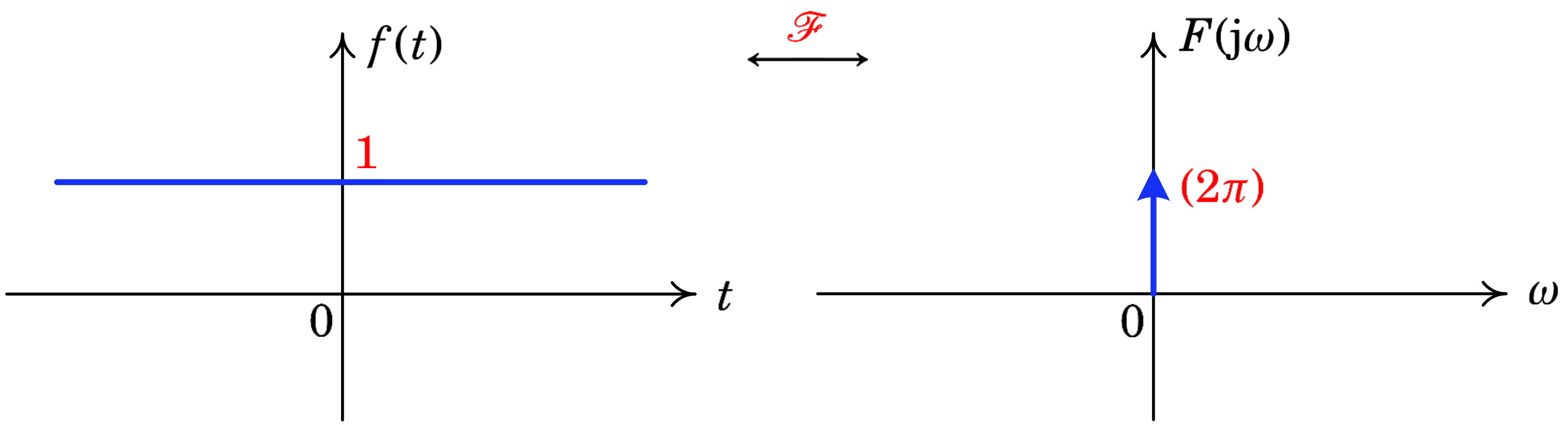
$$=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[1]=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

5.2-1 常见非周期信号的频谱

2. 直流信号：$f(t)=1,\ \ t\in\mathbb{R}$

$$F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\delta(\omega)$$



直流信号　　　　频谱函数

单位冲激信号与直流信号的Fourier变换成对偶关系

5.2-1 常见非周期信号的频谱

3. 符号函数： $\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{sgn}(t)|\mathrm{d}t=\infty$$

Dirichlet条件 ✗

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}\right]=\int_{-\infty}^{0}(-1)e^{\sigma t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}e^{-\sigma t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

双边指数衰减函数

$$=-\int_{-\infty}^{0}e^{(\sigma-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{\sigma-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\sigma+\mathrm{j}\omega}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\lim_{\sigma\to0}\mathscr{F}\left[\mathrm{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}\right]$$

$$=\lim_{\sigma\to0}\left(-\frac{1}{\sigma-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\sigma+\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

因平均值为 0，符号函数是特例
一般情况这么做会丢失冲激信号

5.2-1 常见非周期信号的频谱

3. 符号函数：$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$

$\cos(\varphi(\omega))=0 \quad \sin(\varphi(\omega))=\pm 1$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}=-\frac{\mathrm{j}2}{\omega}=\frac{2}{|\omega|}e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=\frac{2}{|\omega|}[\cos(\varphi(\omega))+\mathrm{j}\sin(\varphi(\omega))]$$

$\omega>0 \qquad \sin(\varphi(\omega))=-1 \qquad \varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}$

$\omega<0 \qquad \sin(\varphi(\omega))=1 \qquad \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}$

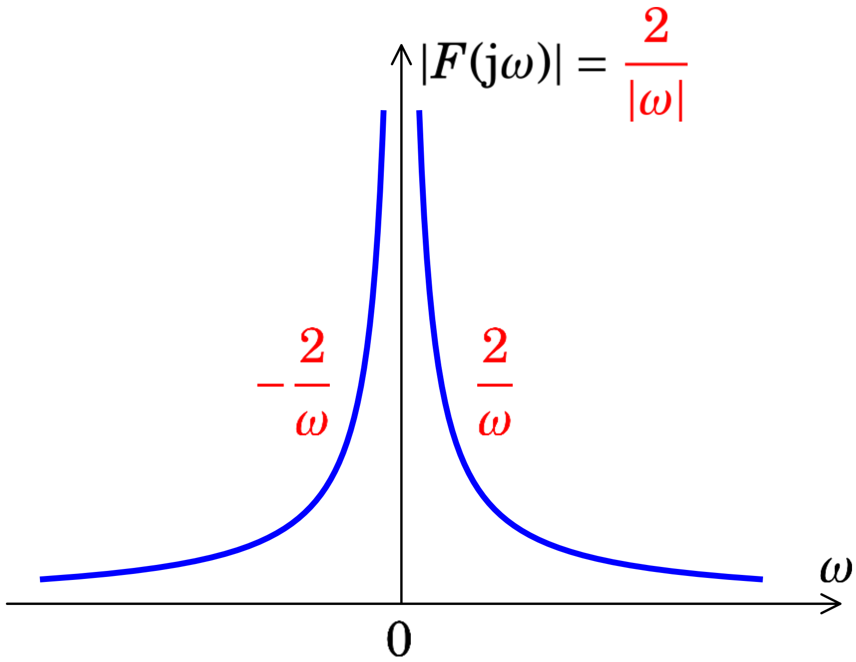
$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega)$$

$\omega\neq 0$

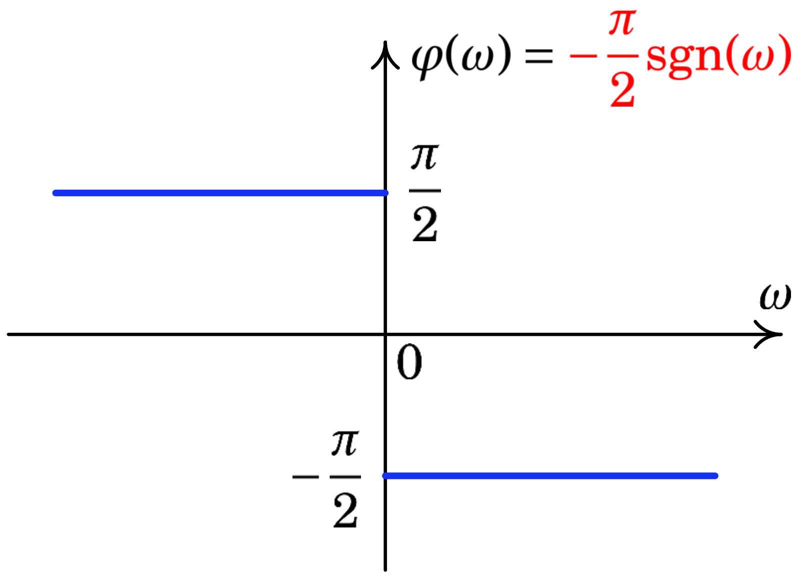
5.2-1 常见非周期信号的频谱

3. 符号函数： $\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$



幅度频谱(偶对称)



相位频谱(奇对称)

5.2-1 常见非周期信号的频谱

4. 单位阶跃信号：$u(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|\mathrm{d}t=\infty$$ **Dirichlet条件** ✗

信号分解 $u(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{2}\mathscr{F}[1]+\frac{1}{2}\mathscr{F}[\mathrm{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

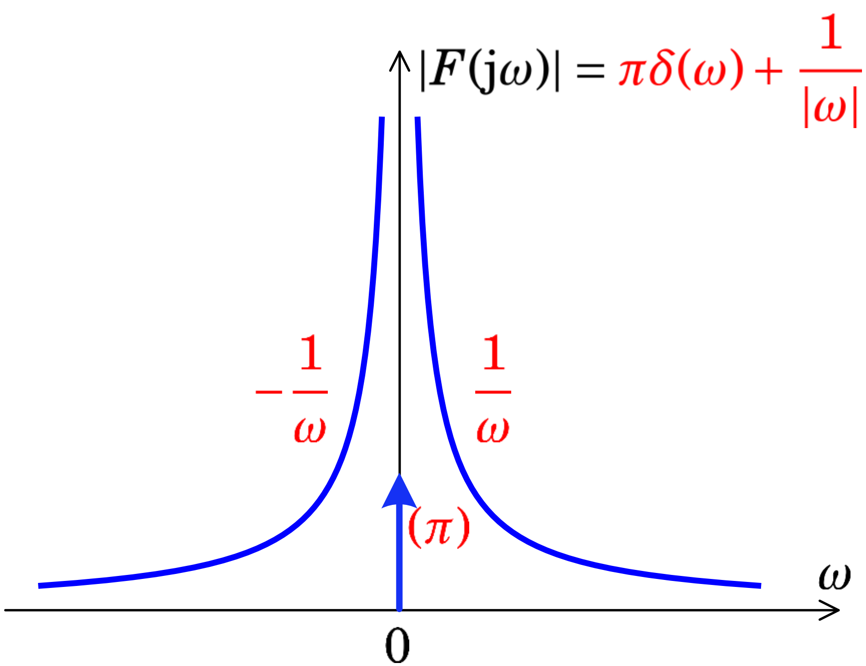
$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{|\omega|}e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega)$$

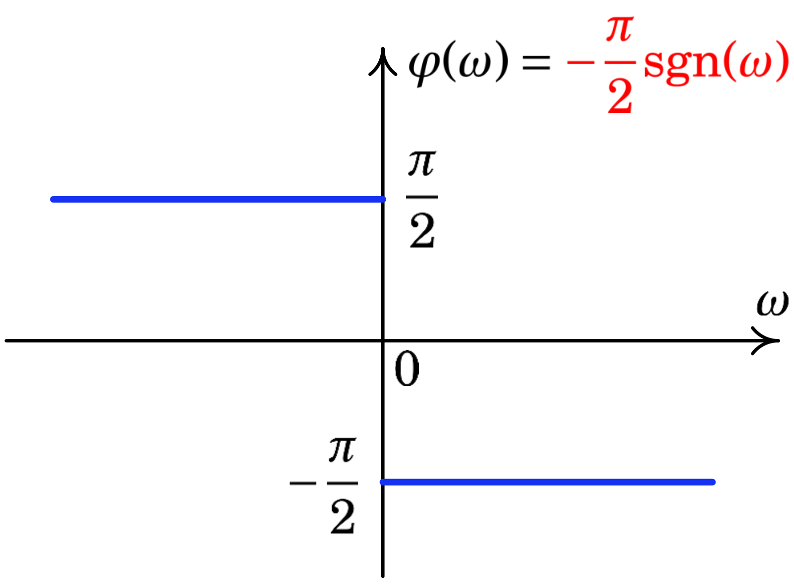
5.2-1 常见非周期信号的频谱

4. 单位阶跃信号： $u(t)$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{|\omega|}e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$



幅度频谱



相位频谱

5.2-1 常见非周期信号的频谱

5. 单边指数信号： $f(t)=e^{-\alpha t}u(t),\ \ \alpha>0$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

$$=\frac{\alpha-\mathrm{j}\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\quad\Rightarrow\quad|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

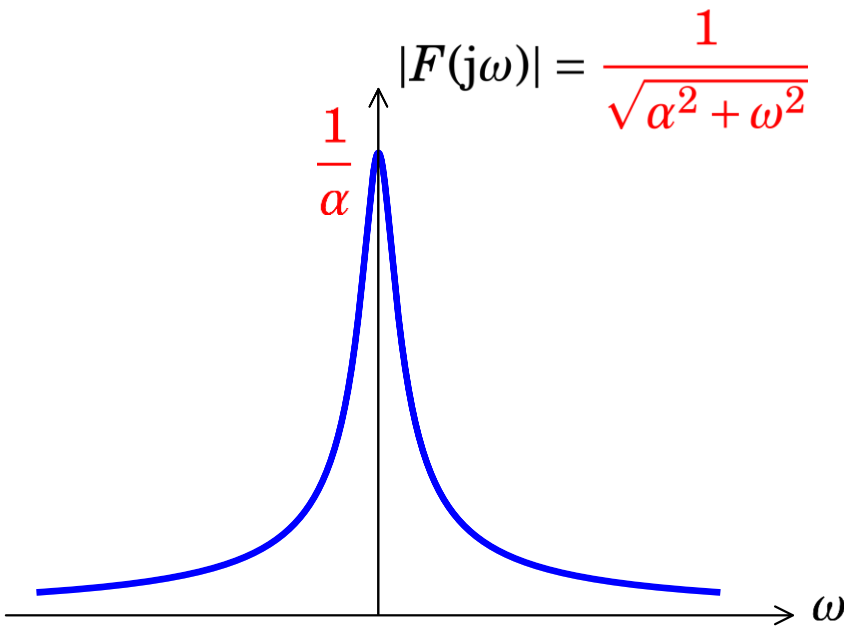
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}[\cos(\varphi(\omega))+\mathrm{j}\sin(\varphi(\omega))]$$

$$\left\{\begin{aligned}\cos(\varphi(\omega))&=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\\ \sin(\varphi(\omega))&=\frac{-\omega}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\tan(\varphi(\omega))=-\frac{\omega}{\alpha}\quad\Rightarrow\quad\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

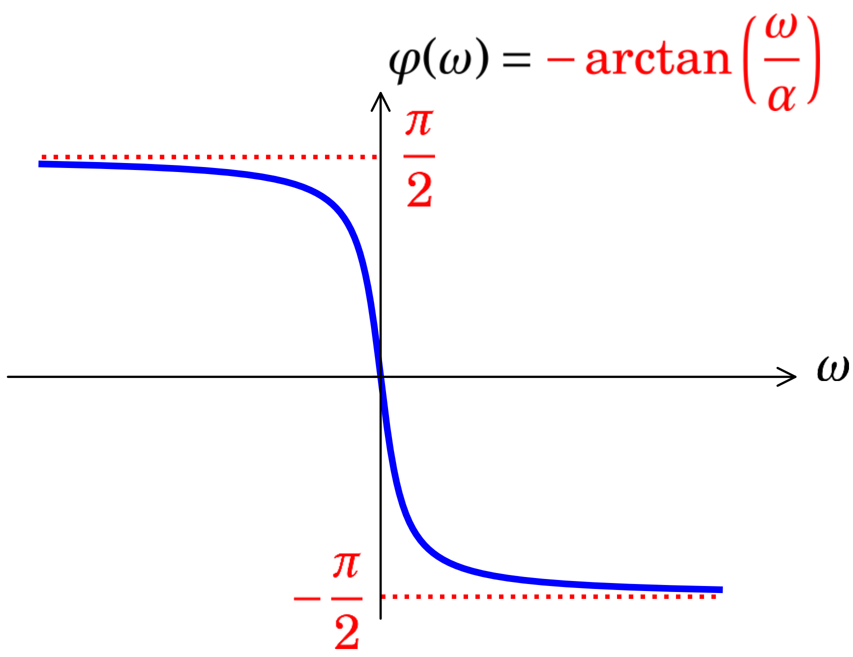
5.2-1 常见非周期信号的频谱

5. 单边指数信号： $f(t)=e^{-\alpha t}u(t),\ \ \alpha>0$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$



幅度频谱



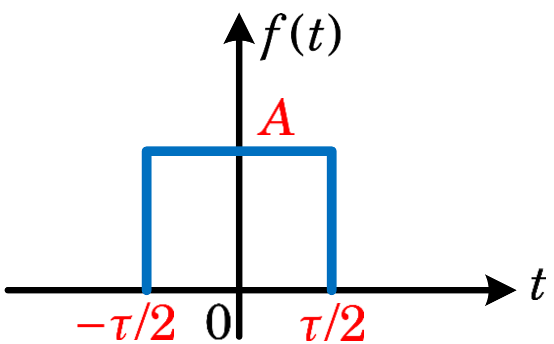
相位频谱

5.2-1 常见非周期信号的频谱

6. 单位矩形脉冲信号：$p_1(t)$

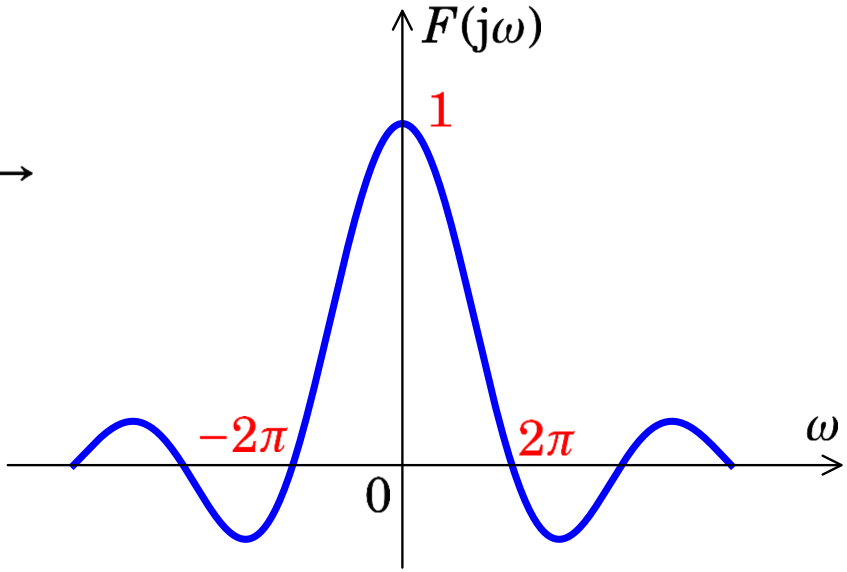
$$F(\mathrm{j}\omega) = \tau A \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$\tau = 1,\ \ A = 1$



矩形脉冲信号

$\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}$



频谱函数

5.2-2 常见周期信号的频谱

1. 虚指数信号： $e^{j\omega_0 t},\ t\in\mathbb{R}$

$$F(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\mathscr{F}[1]=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$2\pi\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$$

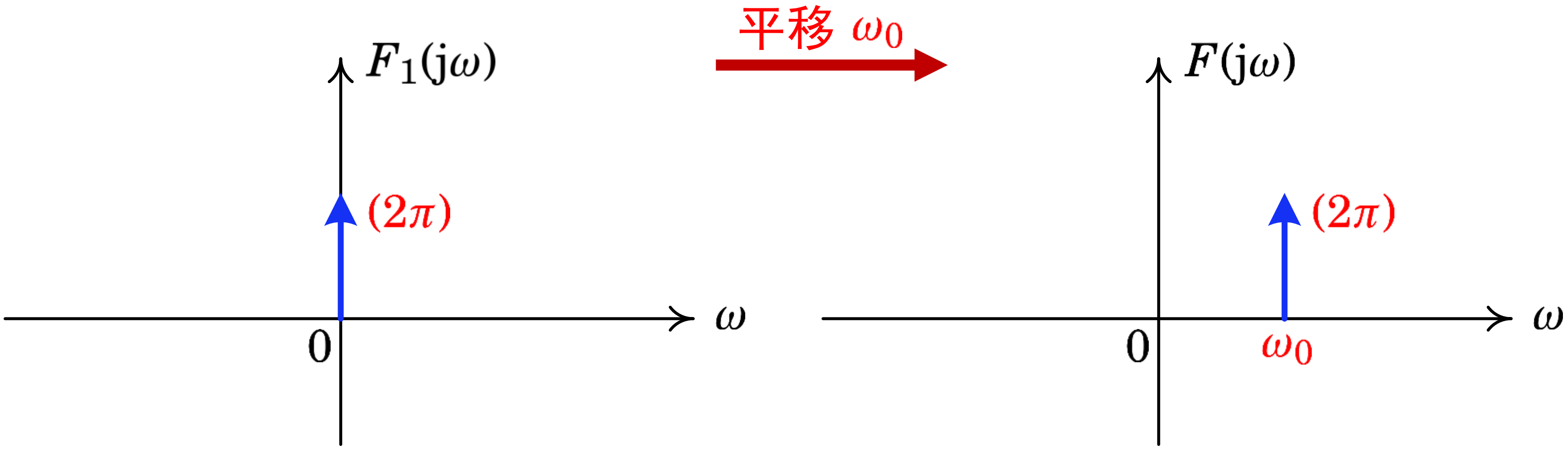
$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

5.2-2 常见周期信号的频谱

1. 虚指数信号： $e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$， $t \in \mathbb{R}$

$$F(\mathrm{j}\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



直流信号的频谱函数　　　　虚指数信号的频谱函数

虚指数信号仅在 $\omega = \omega_0$ 处有一冲激，故也称为单频信号

5.2-2 常见周期信号的频谱

2. 正弦型信号：$\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{\mathrm{j}\omega_0 t} + e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right]$$

$$\updownarrow \mathscr{F}$$

$$F_{\mathrm{c}}(\mathrm{j}\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[e^{\mathrm{j}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\mathscr{F}[e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[e^{\mathrm{j}\omega_0 t} - e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right]$$

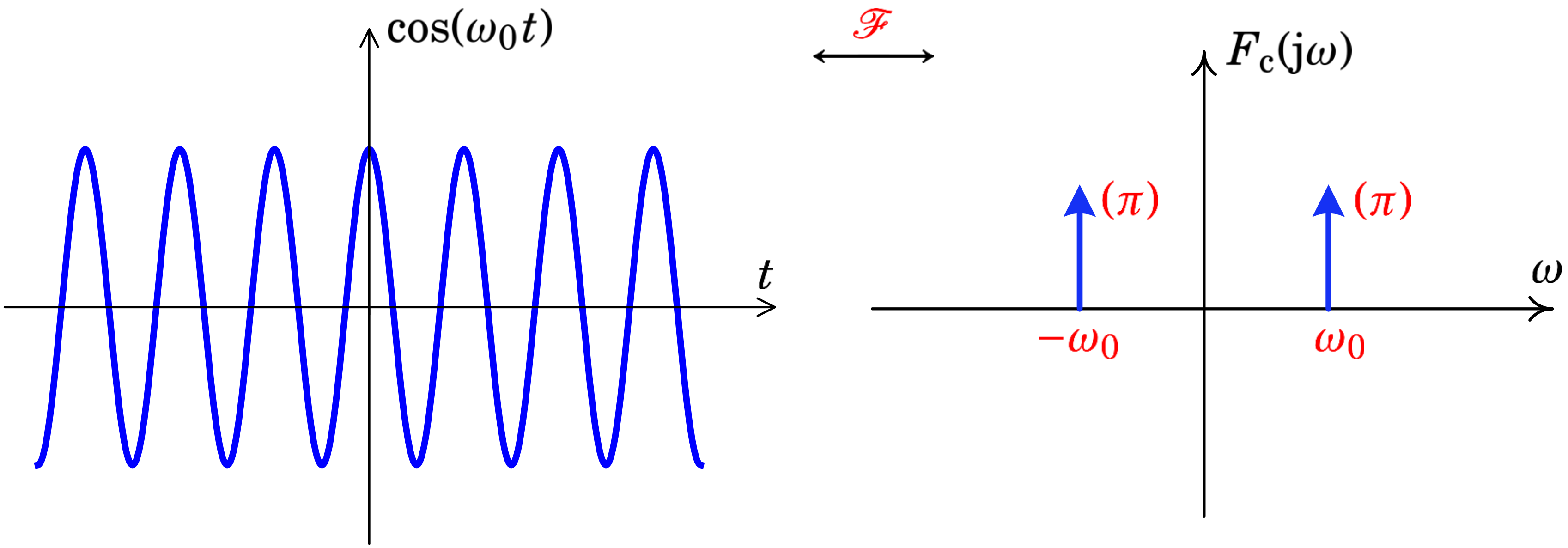
$$\updownarrow \mathscr{F}$$

$$F_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) = -\mathrm{j}\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

5.2-2 常见周期信号的频谱

2. 正弦型信号：$\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$

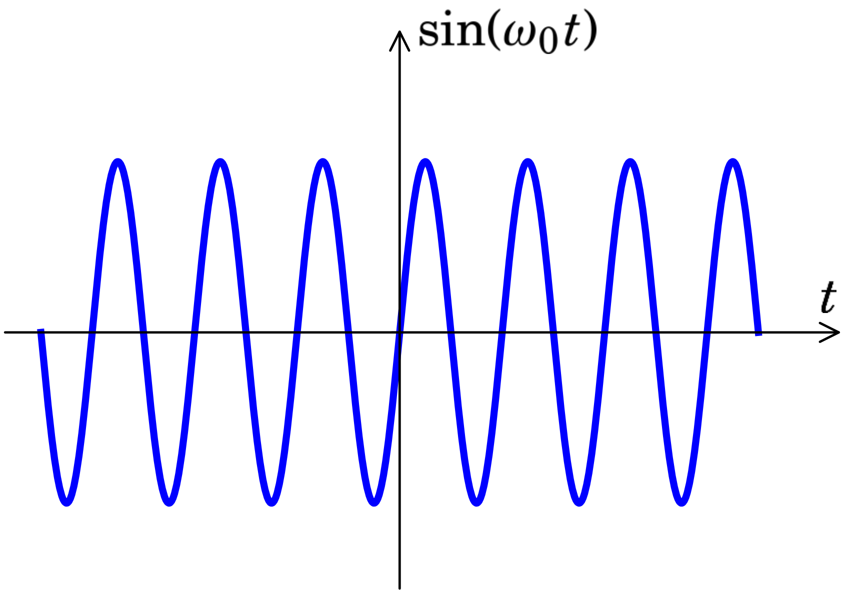
$$F_c(\mathrm{j}\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

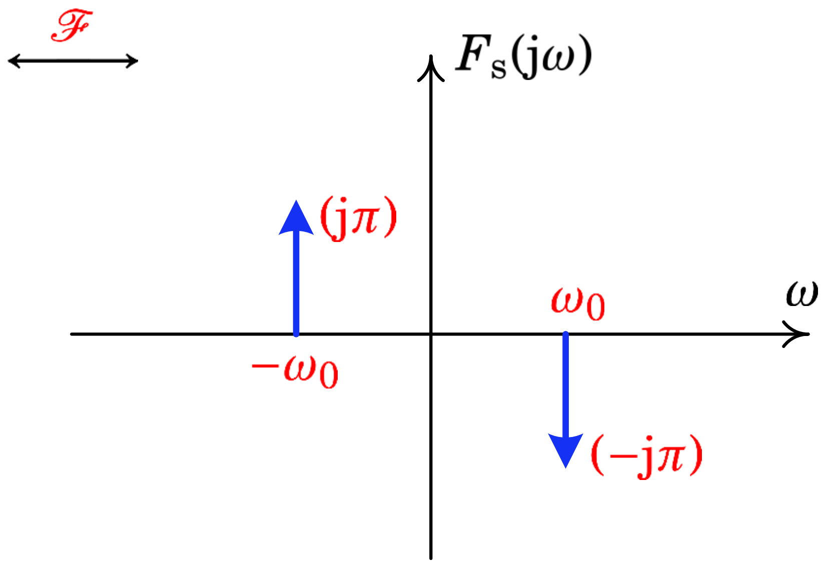


5.2-2 常见周期信号的频谱

2. 正弦型信号：$\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$F_s(j\omega) = -j\pi\,[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$





5.2-2 常见周期信号的频谱

3. 一般周期信号：$f(t)=f(t+T_0),\ \ t\in\mathbb{R}$

Fourier级数 $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

Fourier变换 $$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathscr{F}\left[e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\right]$$

一串冲激

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$$

5.2-2 常见周期信号的频谱

3. 一般周期信号：$f(t)=f(t+T_0),\ \ t\in\mathbb{R}$

Fourier级数 $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

重要关系

Fourier变换 $$F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$$

Fourier变换统一Fourier级数表示

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \overset{\text{取样}}{=\!=\!=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

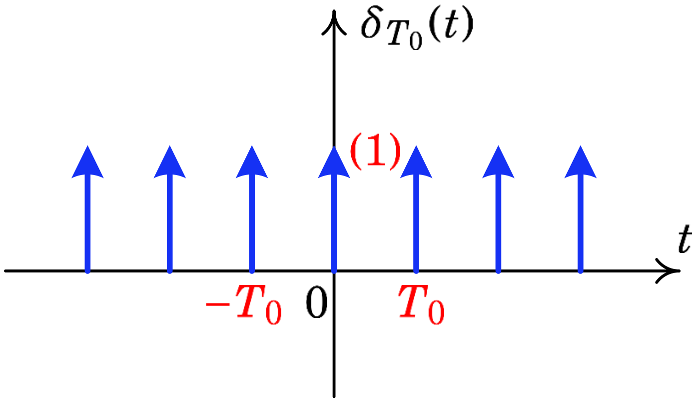
Fourier级数

5.2-2 常见周期信号的频谱

4. 周期冲激串：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0),\quad n\in\mathbb{Z}$$



周期冲激串

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\delta(t-nT_0)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$nT_0\in<T_0>$

$$=\frac{1}{T_0}e^{-\mathrm{j}n\omega_0 nT_0}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

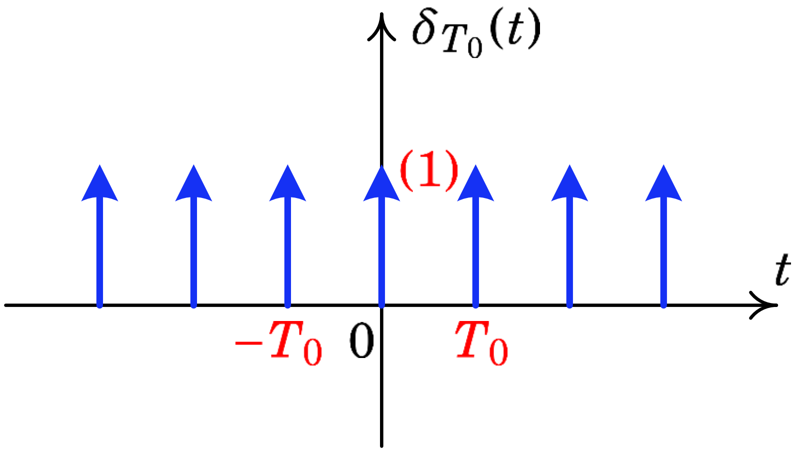
$$=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

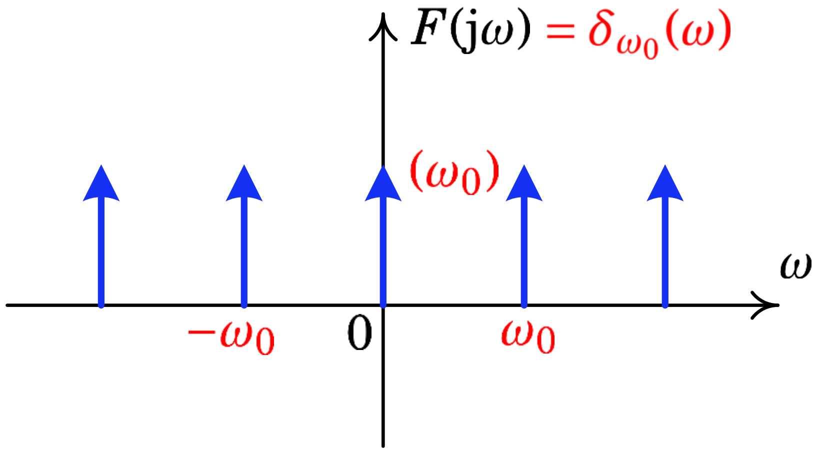
5.2-2 常见周期信号的频谱

4. 周期冲激串： $\delta_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0),\ \ n\in\mathbb{Z}$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$



周期冲激串



周期冲激串的频谱

$\alpha > 0,\ \tau > 0$ **常见信号的Fourier变换表**

序号	$f(t)$	$F(j\omega)$	序号	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{\alpha + j\omega}$	7	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$
2	$e^{-\alpha\|t\|}$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	8	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$
3	$t^n e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{n!}{(\alpha + j\omega)^{n+1}}$	9	$e^{-\alpha^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
4	$\delta(t)$	1	10	$\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$	$\dfrac{\pi}{\omega_0}p_{2\omega_0}(\omega)$
5	1	$2\pi\delta(\omega)$	11	$p_\tau(t)$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$
6	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	12	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0)$

$\alpha > 0$	常见信号的Fourier变换表(续)	
序号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
13	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
14	$\sin(\omega_0 t)$	$-\mathrm{j}\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
15	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
16	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
17	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\alpha+\mathrm{j}\omega}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$
18	$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$

§5.3 连续时间Fourier变换的基本性质

线性	共轭	共轭对称	互易对称	展缩	时移	频移
卷积	乘积	时域微分	频域微分	积分及推论		Parseval

5.3-1 Fourier变换的线性特性

1. 线性特性

$$f_1(t),\ f_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F_1(\mathrm{j}\omega),\ F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$af_1(t)+bf_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} aF_1(\mathrm{j}\omega)+bF_2(\mathrm{j}\omega)$$

证明：

$$\mathscr{F}[af_1(t)+bf_2(t)]$$

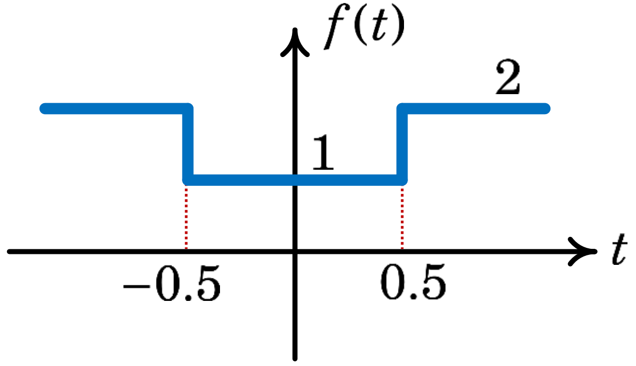
$$=\int_{-\infty}^{\infty}[af_1(t)+bf_2(t)]e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+b\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=aF_1(\mathrm{j}\omega)+bF_2(\mathrm{j}\omega)$$

5.3-1 Fourier变换的线性特性

【例】求图示信号的 Fourier 变换



解： $f(t)=2-p_1(t)$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$$

$$=2\mathscr{F}[1]-\mathscr{F}[p_1(t)]$$

$$=2\cdot 2\pi\delta(\omega)-\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$=4\pi\delta(\omega)-\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$1 \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$p_\tau(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

5.3-2 Fourier变换的共轭及共轭对称性

2. 共轭及共轭对称性

$$f(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f^*(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F^*(-\mathrm{j}\omega) \qquad f^*(-t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F^*(\mathrm{j}\omega)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]^* = F^*(-\mathrm{j}\omega)$$

$$\mathscr{F}[f^*(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau)e^{\mathrm{j}\omega \tau}\mathrm{d}\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega \tau}\mathrm{d}\tau\right]^* = F^*(\mathrm{j}\omega)$$

5.3-2 Fourier变换的共轭及共轭对称性

$$f(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$
$$f^*(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F^*(-\mathrm{j}\omega)$$
$$f^*(-t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F^*(\mathrm{j}\omega)$$

□ 共轭及共轭对称性的讨论：

- 信号的频谱一般为复函数 $F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$
- $f(t)$ 为实函数 $f(t)=f^*(t)$，则 $F(\mathrm{j}\omega)=F^*(-\mathrm{j}\omega)$

$$\Leftrightarrow |F(\mathrm{j}\omega)|e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=|F(-\mathrm{j}\omega)|e^{-\mathrm{j}\varphi(-\omega)}$$

- 实信号幅度谱函数偶对称：$|F(\mathrm{j}\omega)|=|F(-\mathrm{j}\omega)|$
- 实信号相位谱函数奇对称：$\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$

$$\Leftrightarrow F_\mathrm{R}(\mathrm{j}\omega)+\mathrm{j}F_\mathrm{I}(\mathrm{j}\omega)=F_\mathrm{R}(-\mathrm{j}\omega)-\mathrm{j}F_\mathrm{I}(-\mathrm{j}\omega)$$

- 实信号频谱函数的实部偶对称：$F_\mathrm{R}(\mathrm{j}\omega)=F_\mathrm{R}(-\mathrm{j}\omega)$
- 实信号频谱函数的虚部奇对称：$F_\mathrm{I}(\mathrm{j}\omega)=-F_\mathrm{I}(-\mathrm{j}\omega)$

5.3-2 Fourier变换的共轭及共轭对称性

$$f(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$
$$f^*(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F^*(-\mathrm{j}\omega)$$
$$f^*(-t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F^*(\mathrm{j}\omega)$$

□ 共轭及共轭对称性的讨论：

- $f(t)$ 为实偶函数 $f(t)=f(-t)=f^*(-t)$，则 $F(\mathrm{j}\omega)=F^*(\mathrm{j}\omega)$
  - 实偶信号的频谱函数是 ω 的实偶函数：$F(\mathrm{j}\omega)=F^*(\mathrm{j}\omega)\stackrel{实}{=}F(-\mathrm{j}\omega)$
  - 如：$p_1(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Sa}(\omega/2)$
- $f(t)$ 为实奇函数 $f(t)=-f(-t)=-f^*(-t)$，则 $F(\mathrm{j}\omega)=-F^*(\mathrm{j}\omega)$
  - 实奇信号的频谱函数是 ω 的纯虚函数，虚部奇对称：$F(\mathrm{j}\omega)=-F^*(\mathrm{j}\omega)\stackrel{实}{=}-F(-\mathrm{j}\omega)$
  - 如：$\mathrm{sgn}(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$

5.3-2 Fourier变换的共轭及共轭对称性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)$$
$$f^*(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F^*(-\mathrm{j}\omega)$$
$$f^*(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F^*(\mathrm{j}\omega)$$

□ 共轭及共轭对称性的讨论：

➢ 任意实信号可分解为偶分量与奇分量之和

$$f(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]+\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]=f_{\mathrm{e}}(t)+f_{\mathrm{o}}(t)$$

$$\mathscr{F}[f_{\mathrm{e}}(t)]=\frac{1}{2}\mathscr{F}[f(t)+f^*(-t)]=\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)+F^*(\mathrm{j}\omega)]=F_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\omega)$$

$$\mathscr{F}[f_{\mathrm{o}}(t)]=\frac{1}{2}\mathscr{F}[f(t)-f^*(-t)]=\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)-F^*(\mathrm{j}\omega)]=\mathrm{j}F_{\mathrm{I}}(\mathrm{j}\omega)$$

- 实信号偶分量频谱是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的实部
- 实信号奇分量频谱是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的虚部

5.3-2 Fourier变换的共轭及共轭对称性

【例】求双边指数信号 $f(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$, $t\in\mathbb{R}$ 的 Fourier 变换。

解：
$$f(t)=e^{-\alpha|t|}=\begin{cases}e^{-\alpha t}, & t>0\\ e^{\alpha t}, & t<0\end{cases}=e^{-\alpha t}u(t)+e^{\alpha t}u(-t)$$

$$:=g(t)+g(-t)$$

$$g(t)=e^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

$$g_{\mathrm{e}}(t)=\frac{1}{2}[g(t)+g(-t)]\quad\Rightarrow\quad f(t)=2g_{\mathrm{e}}(t)$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=2\mathscr{F}[g_{\mathrm{e}}(t)]=2\cdot\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\right\}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

5.3-3 Fourier变换的互易对称特性

3. 互易对称特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$F(\mathrm{j}t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi f(-\omega)$$

证明：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}t)e^{\mathrm{j}t(-\omega)}\mathrm{d}t \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}t)$$

信号的时域波形与其频谱函数具有对称互易关系

5.3-3 Fourier变换的互易对称特性

【例】求信号 $f(t)=\dfrac{1}{\pi t}$ 的 Fourier 变换

解：

$$\mathrm{sgn}(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

互易对称性 $F(\mathrm{j}t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi f(-\omega)$

$$\frac{2}{\mathrm{j}t} \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \cdot \mathrm{sgn}(-\omega)$$

$$\frac{1}{\pi t} = \frac{2}{\mathrm{j}t}\frac{\mathrm{j}}{2\pi} \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \cdot \mathrm{sgn}(-\omega)\frac{\mathrm{j}}{2\pi} = -\mathrm{j}\cdot\mathrm{sgn}(\omega)$$

5.3-4 Fourier变换的展缩特性

4. 展缩特性

$$f(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f(at) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau/a}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$$

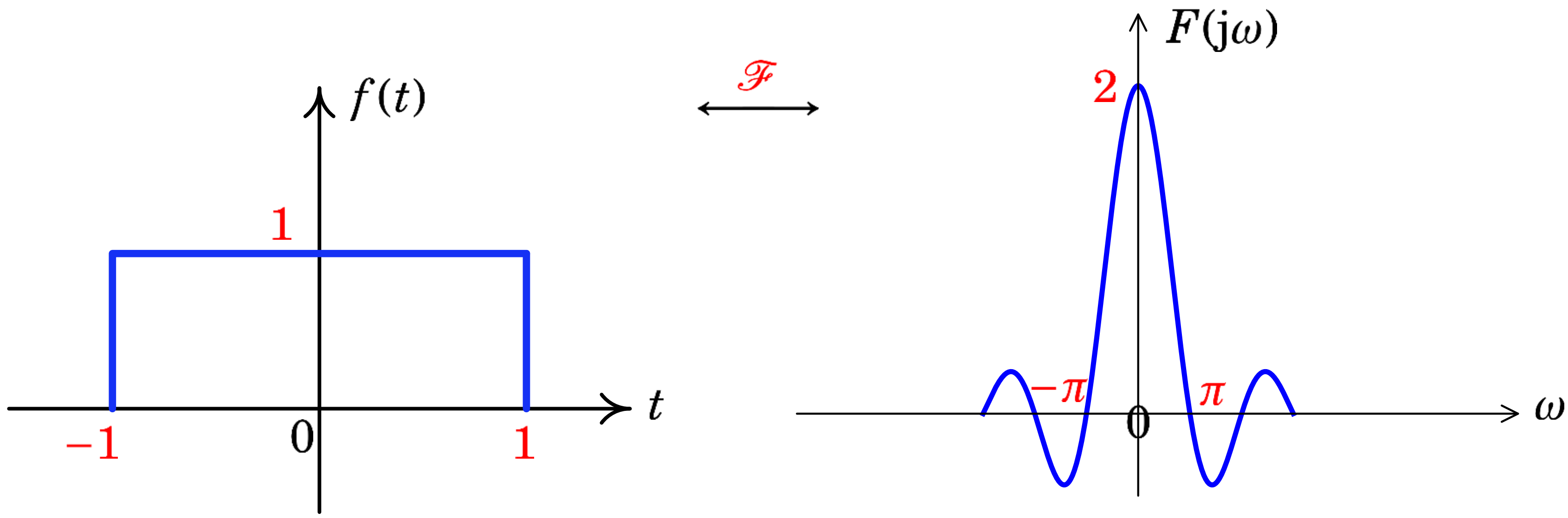
信号时域波形的压缩，对应频谱函数的扩展

5.3-4 Fourier变换的展缩特性

4. 展缩特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$$

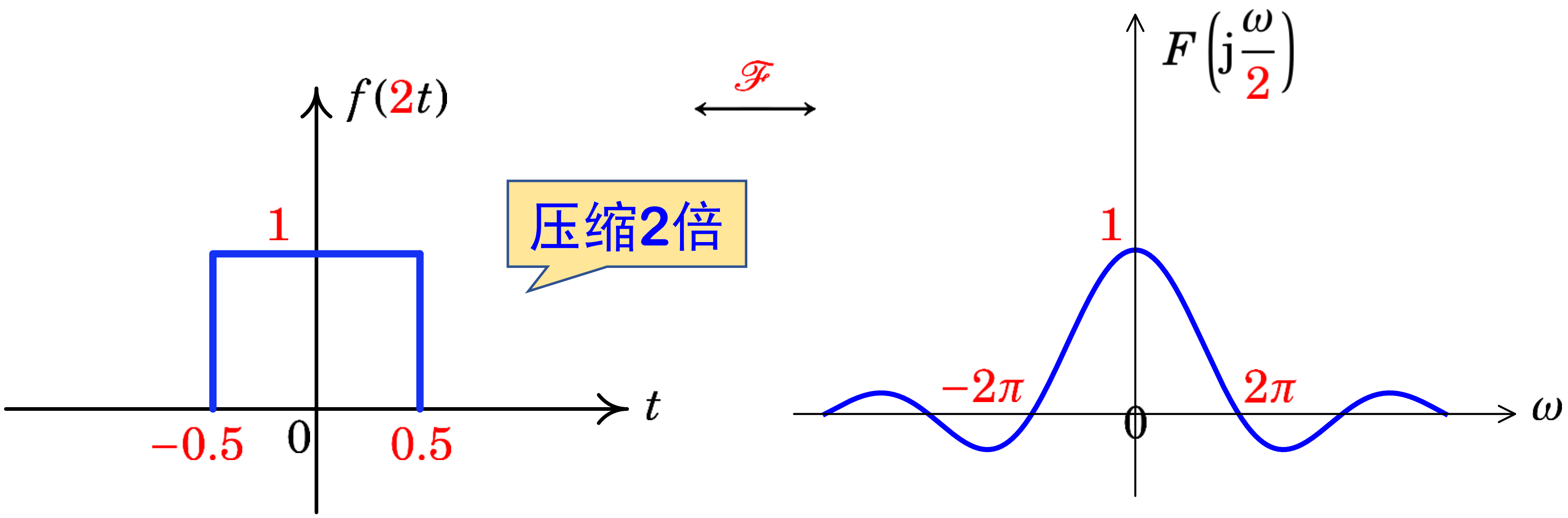


5.3-4 Fourier变换的展缩特性

4. 展缩特性

$$f(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f(at) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$$



5.3-4 Fourier变换的展缩特性

【例】求抽样信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$ 的 Fourier 变换。

解：已知 $p_1(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$F(\mathrm{j}t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi f(-\omega)$$

互易对称性 $\mathrm{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi \cdot p_1(-\omega) = 2\pi \cdot p_1(\omega)$

展缩特性

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$$

$a = 2\omega_0$

$$\mathrm{Sa}(\omega_0 t) = \mathrm{Sa}\left(2\omega_0 \frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{2\pi}{2\omega_0} \cdot p_1\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) = \frac{\pi}{\omega_0} p_{2\omega_0}(\omega)$$

5.3-5 Fourier变换的时移特性

5. 时移特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0},\quad t_0 \in \mathbb{R}$$

证明：

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega(\tau+t_0)}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t_0} = F(\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

信号时域中的时移，对应频谱中附加的相移

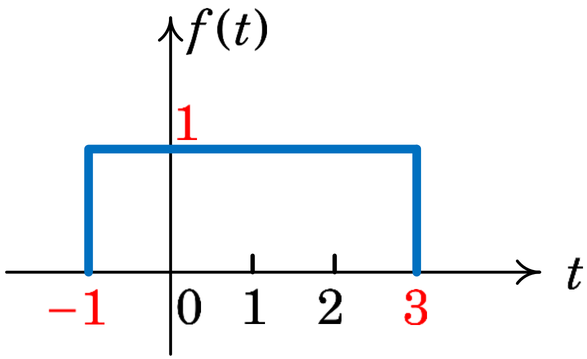
5.3-5 Fourier变换的时移特性

【例】求 $f(t)=u(t+1)-u(t-3)$ 的 Fourier 变换

解：$f(t)=p_4(t-1)$

$$\mathscr{F}[p_4(t)]=4\mathrm{Sa}(2\omega)$$

$$\mathscr{F}[f(t)]=4e^{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(2\omega)$$



$$p_\tau(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$f(t-t_0) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

5.3-5 Fourier变换的时移特性

【例】已知 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\mathrm{j}\omega)$，$g(t) = f(2t+4)$，求 $\mathscr{F}[g(t)]$

解：已知 $f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)$

方法1

先压缩 $f(2t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)$

后左移 $f(2(t+2)) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)e^{2\mathrm{j}\omega}$

方法2

先左移 $f(t+4) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)e^{4\mathrm{j}\omega} = F_1(\mathrm{j}\omega)$

后压缩 $f(2t+4) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \dfrac{1}{2}F_1\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)e^{2\mathrm{j}\omega}$

5.3-6 Fourier变换的频移特性

6. 频移特性

$$f(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0)),\quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

证明：
$$\mathscr{F}[f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

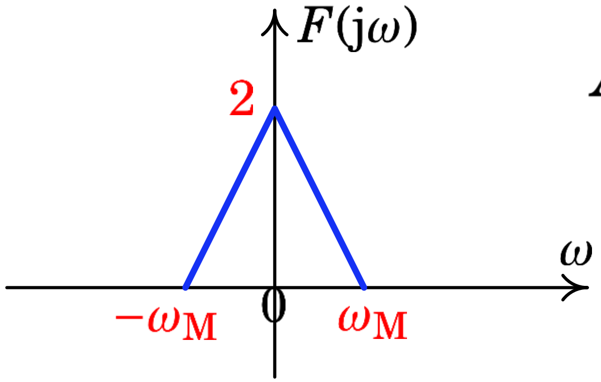
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t$$

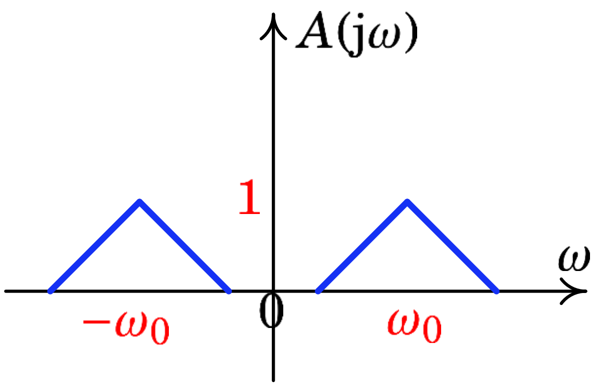
$$= F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$$

信号时域中的相移，对应频谱中频谱函数的频移

5.3-6 Fourier变换的频移特性

【例】 已知信号 $f(t)$ 的频谱函数如图所示，求 $a(t)=f(t)\cos(\omega_0 t)$ 的频谱函数 $\omega_0>\omega_M$





欧拉公式

$$A(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)]$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{F}\left[f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right]+\frac{1}{2}\mathscr{F}\left[f(t)e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+\frac{1}{2}F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))$$

$b(t)=f(t)\sin(\omega_0 t)$，$\omega_0>\omega_M$

请画出频谱 $\mathscr{F}[b(t)]$ 的图形

5.3-7 Fourier变换的卷积特性

7. 卷积特性

$$f_1(t),\ f_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F_1(\mathrm{j}\omega),\ F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$f_1(t)*f_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$$

时域卷积，频域乘积

证明：$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\cdot e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

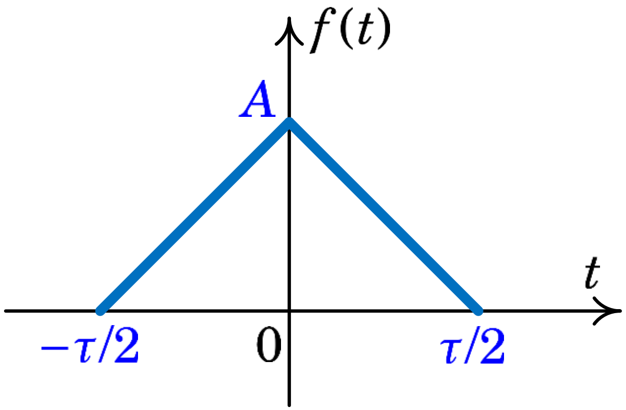
时移特性

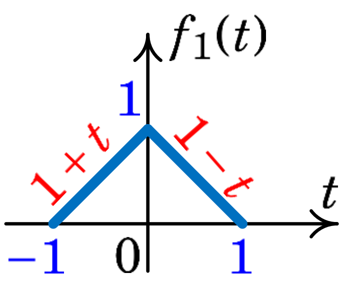
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

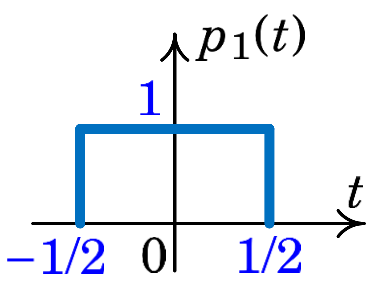
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$$

5.3-7 Fourier变换的卷积特性

【例】求图示三角脉冲信号的频谱







$$p_1(t)=\left[u(t+\tfrac{1}{2})-u(t-\tfrac{1}{2})\right]$$

$$f_1(t)=r(t+1)-2r(t)+r(t-1)$$

$$=p_1(t)*p_1(t)$$

$$\mathscr{F}[p_1(t)]=\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

卷积特性

$$\mathscr{F}[f_1(t)]=\mathrm{Sa}^2(\omega/2)$$

展缩特性

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[Af_1\left(\frac{t}{\tau/2}\right)\right]$$

$$=\frac{\tau A}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

5.3-8 Fourier变换的乘积特性

8. 乘积特性

$$f_1(t),\ f_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F_1(\mathrm{j}\omega),\ F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

时域乘积，频域卷积

证明： $\mathscr{F}[f_1(t)f_2(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega f_2(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t} f_2(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathrm{j}\Omega)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-\mathrm{j}(\omega-\Omega)t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathrm{j}\Omega)F(\mathrm{j}(\omega-\Omega))\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

5.3-9 Fourier变换的时域微分特性

9. 时域微分特性

$$f(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$f^{(n)}(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$$

证明：

$$\mathscr{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d} f(t) \quad \times$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega) e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega = \mathscr{F}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]$$

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega) e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$= \mathscr{F}^{-1}[(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)] \longrightarrow \mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$$

5.3-10 Fourier变换的积分特性

10. 积分特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\mathrm{j}\omega)$$

证明：

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \mathscr{F}[f(t)*u(t)]$$

卷积积分特性

$$= \mathscr{F}[f(t)]\mathscr{F}[u(t)]$$

卷积特性

$$= F(\mathrm{j}\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]$$

5.3-10 Fourier变换的积分特性推论

10. 积分特性的推论

$$f(t),\ f'(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega),\ F_1(\mathrm{j}\omega)$$

$$F(\mathrm{j}\omega) = \pi[f(\infty)+f(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)$$

证明：

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \mathscr{F}[f(t)] - f(-\infty)\mathscr{F}[1]$$

$$= F(\mathrm{j}\omega) - f(-\infty)2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \pi F_1(0)\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)$$

积分特性

$$F_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-\mathrm{j}0t}\mathrm{d}t = f(\infty) - f(-\infty)$$

上下联立，解出 $F(\mathrm{j}\omega)$

5.3-10 Fourier变换的微分、积分关系

10. 微分、积分关系

条件：$f(t),\ f'(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega),\ F_1(\mathrm{j}\omega)$

微分→原信号：$F(\mathrm{j}\omega) = \pi[f(\infty)+f(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)$

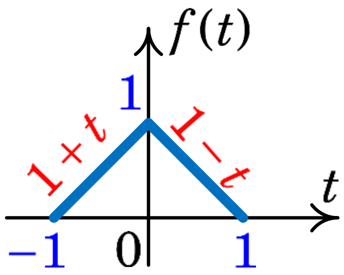
积分→原信号：$F_1(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$

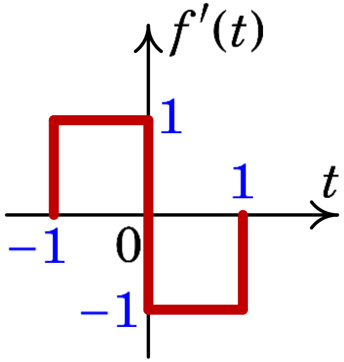
$$\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega\pi[f(\infty)+f(-\infty)]\delta(\omega) + F_1(\mathrm{j}\omega)$$

- 微分恢复原信号频谱时，积分产生的直流或者平均值不可忽略
- 观察波形无穷远处为零，可用$F_1(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$相互确定
- 通常信号导数的频谱更易求出，常用积分特性推论

5.3-10 Fourier变换的积分特性

【例】求图示三角波信号频谱函数





解： $f'(t)=p_1(t+\frac{1}{2})-p_1(t-\frac{1}{2})$

$$\mathscr{F}[p_1(t)]=\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[f'(t)]$$

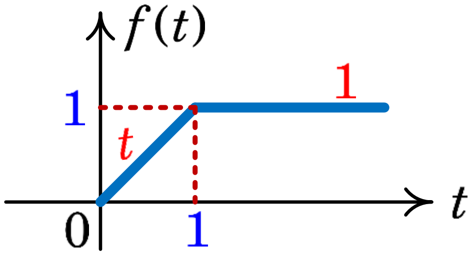
$$=e^{\mathrm{j}\omega/2}\mathrm{Sa}(\omega/2)-e^{-\mathrm{j}\omega/2}\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

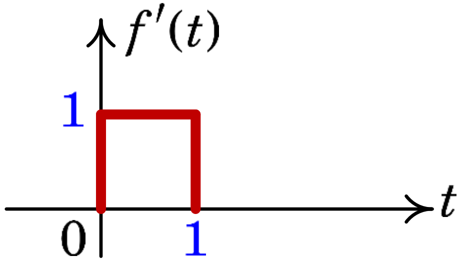
$$=2\mathrm{j}\sin(\omega/2)\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\pi[\overset{=0}{f(\infty)}+\overset{=0}{f(-\infty)}]\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Sa}^2(\omega/2)$$

5.3-10 Fourier变换的积分特性

【例】求图示信号频谱函数





解：$f'(t) = p_1(t - \frac{1}{2})$

$$\mathscr{F}[p_1(t)] = \mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$F_1(\mathrm{j}\omega) = \mathscr{F}[f'(t)]$$

$$= e^{-\mathrm{j}\omega/2}\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

$$F(\mathrm{j}\omega) = \pi[\overset{1}{f(\infty)} + \overset{0}{f(-\infty)}]\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-\mathrm{j}\omega/2}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(\omega/2)$$

5.3-11 Fourier变换的频域微分特性

11. 频域微分特性

$$f(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$tf(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

证明：

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-\mathrm{j}t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \mathscr{F}[tf(t)]$$

5.3-11 Fourier变换的频域微分特性

【例】分别求 t, $|t|$, $tu(t)$, $te^{-\alpha t}u(t)$ 频谱函数

$$tf(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

解：

(1) $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \Longrightarrow \mathscr{F}[t\cdot 1] = \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{F}[1]}{\mathrm{d}\omega} = 2\pi\delta'(\omega)$

(2) $\mathscr{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \dfrac{2}{\mathrm{j}\omega} \Longrightarrow \mathscr{F}[t\cdot\mathrm{sgn}(t)] = \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{F}[\mathrm{sgn}(t)]}{\mathrm{d}\omega} = -\dfrac{2}{\omega^2}$

(3) $\mathscr{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} \Longrightarrow \mathscr{F}[t\cdot u(t)] = \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{F}[u(t)]}{\mathrm{d}\omega} = \mathrm{j}\pi\delta'(t) - \dfrac{1}{\omega^2}$

(4) $\mathscr{F}[e^{-\alpha t}u(t)] = \dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega} \Longrightarrow \mathscr{F}[t\cdot e^{-\alpha t}u(t)] = \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{F}[e^{-\alpha t}u(t)]}{\mathrm{d}\omega} = \dfrac{1}{(\alpha+\omega)^2}$

5.3-12 Fourier变换的Parseval定理

12. Parseval定理

$$f(t) \stackrel{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

证明：$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) f(t) \mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega) e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) F(\mathrm{j}\omega) e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega) F^*(\mathrm{j}\omega) \mathrm{d}\omega$$

5.3-12 Fourier变换的Parseval定理

12. Parseval定理

$$f(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F(\mathrm{j}\omega)$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

- 利用时域描述或频域描述均可计算非周期能量信号的能量
- 时域与频域中保持能量守恒：Parseval能量守恒定理
- 能量谱密度函数(能量谱)

$$\Delta E_f = \frac{1}{2\pi} |F(\mathrm{j}\omega)|^2 \Delta\omega$$

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi} |F(\mathrm{j}\omega)|^2$$

  - 信号的能量谱是偶函数
  - 信号的能量谱仅取决于频谱函数的幅度谱，与相位谱无关

5.3-12 Fourier变换的Parseval定理

【例】假设能量信号 $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ 的有效带宽定义为

$$\frac{\int_{-\omega_B}^{\omega_B} G(j\omega)d\omega}{E_f} \geqslant 0.95 \qquad \text{求 } \omega_B$$

解：

$$E_f=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt=\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t}dt=\frac{1}{2\alpha}$$

$$F(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$\int_{-\omega_B}^{\omega_B} G(j\omega)d\omega=\int_{-\omega_B}^{\omega_B}\frac{1}{2\pi}|F(j\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_B}^{\omega_B}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}d\omega$$

谱密度

$$=\frac{1}{\pi\alpha}\arctan(\omega_B/\alpha)$$

5.3-12 Fourier变换的Parseval定理

【例】假设能量信号 $f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ 的有效带宽定义为

$$\frac{\int_{-\omega_B}^{\omega_B} G(j\omega)d\omega}{E_f} \geqslant 0.95 \qquad \text{求 } \omega_B$$

解：

$$E_f=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\alpha}$$

$$\int_{-\omega_B}^{\omega_B} G(j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi\alpha}\arctan(\omega_B/\alpha)$$

$$\frac{\frac{1}{\pi\alpha}\arctan(\omega_B/\alpha)}{\frac{1}{2\alpha}}=0.95 \quad \Rightarrow \quad \omega_B=\alpha\tan\left(\frac{0.95\pi}{2}\right)$$

$$\approx 12.7062\alpha\,(\text{rad/s})$$

Fourier变换的基本性质	
线性	✍ $af_1(t)+bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} aF_1(\mathrm{j}\omega)+bF_2(\mathrm{j}\omega)$
共轭	$f^*(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F^*(-\mathrm{j}\omega)$
共轭对称	$f^*(-t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F^*(\mathrm{j}\omega)$
互易对称	$F(\mathrm{j}t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi f(-\omega)$
展缩	✍ $f(at) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
时移	✍ $f(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0},\quad t_0\in\mathbb{R}$
频移	$f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0)),\quad \omega_0\in\mathbb{R}$

Fourier变换的基本性质(续)	
卷积	✍ $f_1(t)*f_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$
乘积	✍ $f_1(t)f_2(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	✍ $f^{(n)}(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
积分	✍ $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\mathrm{j}\omega)$
积分推论	✍ $F(\mathrm{j}\omega)=\pi[f(\infty)+f(-\infty)]\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\mathrm{j}\omega)$
频域微分	$t^n f(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}^n \frac{\mathrm{d}F^n(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
Parseval定理	✍ $E_f=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\mathrm{d}\omega$

本章小结

- ☐ 连续非周期信号的频谱
- ☐ 常见连续信号的频域分析
- ☐ 连续时间Fourier变换的性质
- ☐ 学习要求：

1. 理解从Fourier级数到Fourier变换的建立过程
2. 掌握Fourier变换的定义及频谱的概念
3. 掌握常见连续信号的频谱
4. 熟练掌握Fourier变换的12条基本性质，并可灵活应用

附：第5次作业

- **第178-179页：**

5-1：(c)，用Fourier变换的定义计算，要有过程

5-2：(a)，用Fourier变换的定义计算，要有过程

5-3：(3)

附：第6次作业

◆ 第179-182页：

5-4：(c)，(e)，注意：无需算出 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的具体表达式

5-5：(d)，(h)，条件改为：已知 $p_\tau(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \tau \mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$

5-6：(3)，(4)，(5)

5-14：(a)