



江苏师范大学 电气工程及其自动化学院
JIANGSU NORMAL UNIVERSITY SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING & AUTOMATION



信号与系统

第6章 系统的频域分析

李灿 | 12#503A | lic@jsnu.edu.cn | <https://sslic.cn/ss>





本章主要内容

- 连续非周期信号通过系统响应的频域分析
- 连续周期信号通过系统响应的频域分析
- 无失真传输系统与理想滤波器
- 时域采样与采样定理

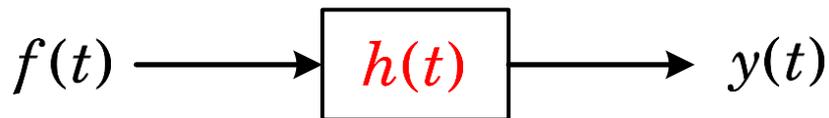


§6.1 非周期信号通过系统响应的频域分析

1. 连续系统的频率响应
2. 微分方程描述的**LTI**系统响应
3. 电路系统的响应



6.1-1 连续系统的频率响应



$$\begin{aligned} y(t) = f(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

□ 约定：

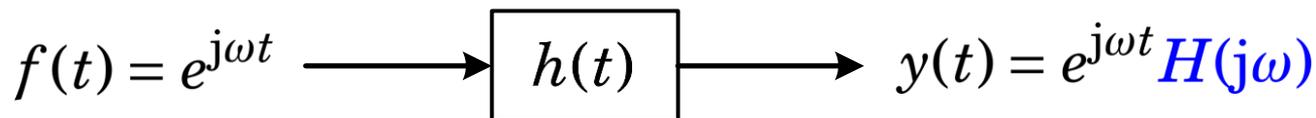
- 讨论的系统不限定因果，即允许 $h(t) \neq 0, t < 0$
- 冲激响应 $h(t)$ 绝对可积

6.1-1 连续系统的频率响应

□ 虚指数信号 $f(t) = e^{j\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$ 输入系统的零状态响应

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \\ &= e^{j\omega t} H(j\omega) \quad h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \end{aligned}$$

称 $H(j\omega)$ 为系统的频率响应



- 零状态响应为与输入同频率的虚指数信号，幅值与相位取决于 $H(j\omega)$
- $H(j\omega)$ 反映了连续LTI系统对不同频率信号的响应特性



6.1-1 连续系统的频率响应

□ 存在Fourier变换的任意信号 $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

虚指数信号的线性组合

$$y(t) = T\{f(t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) T\{e^{j\omega t}\} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \rightarrow \quad Y(j\omega) = F(j\omega) H(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



6.1-1 连续系统的频率响应

□ 直接利用Fourier变换的卷积特性亦可得到

$$\{y(t) = f(t) * h(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)\}$$

连续LTI系统的频率响应

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

幅度响应

相位响应

$h(t)$ 实函数：

- 幅度响应偶对称
- 相位响应奇对称



6.1-1 连续系统的频率响应

【例】已知某连续 LTI 系统的冲激响应

$$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

求该系统的频率响应

解： $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

$$= \mathcal{F}[e^{-t}u(t)] - \mathcal{F}[e^{-2t}u(t)]$$

$$= \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\alpha + j\omega}$$



6.1-1 连续系统的频率响应

【例】已知某连续 LTI 系统的输入信号 $f(t) = e^{-t}u(t)$ ，输出信号

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

求该系统的频率响应和冲激响应

解： $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1+j\omega}$ $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega}$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega}}{\frac{1}{1+j\omega}} = 1 + \frac{1+j\omega}{2+j\omega} = 2 - \frac{1}{2+j\omega}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = 2\delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$



6.1-2 微分方程描述的LTI系统响应

□ LTI系统数学模型

$$\begin{aligned}
 & a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 y(t) \\
 = & b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)
 \end{aligned}$$



Fourier变换时域微分特性

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\begin{aligned}
 & [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0] Y(j\omega) \\
 = & [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0] F(j\omega)
 \end{aligned}$$



6.1-2 微分方程描述的LTI系统响应

□ LTI系统数学模型

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$



Fourier变换时域微分特性

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(j\omega)$$

LTI系统的频率响应

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

频域描述的代数方程



6.1-2 微分方程描述的LTI系统响应

【例】已知某LTI系统的动态方程 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ，求系统的频率响应和冲激响应

解：动态方程作Fourier变换

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2] Y(j\omega) = F(j\omega)$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] \\ &= e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$



6.1-2 微分方程描述的LTI系统响应

【例】已知某LTI系统动态方程 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3f'(t) + 4f(t)$ ，
系统输入激励 $f(t) = e^{-3t}u(t)$ ，求零状态响应

解：
$$F(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}$$

动态方程作Fourier变换

$$[(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2] Y(j\omega) = [3(j\omega) + 4] F(j\omega)$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{3(j\omega) + 4}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} \cdot \frac{1}{3 + j\omega} = \frac{3(j\omega) + 4}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \\ &= \frac{1/2}{1 + j\omega} + \frac{2}{2 + j\omega} - \frac{5/2}{3 + j\omega} \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$



6.1-2 微分方程描述的LTI系统响应

【例】求图示RC电路系统的频率响应和冲激响应

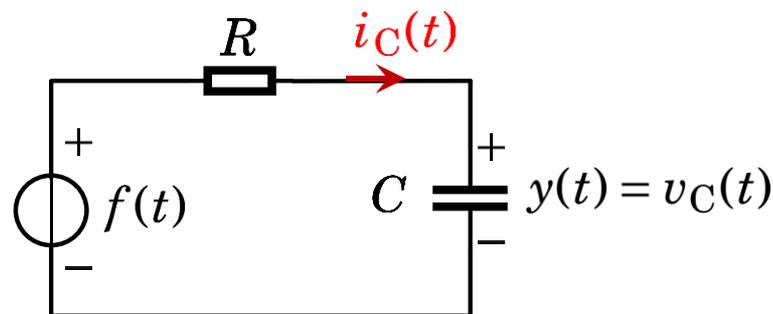
解: $Ri_C(t) + y(t) = f(t)$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = Cy'(t)$$

$$\Rightarrow RCy'(t) + y(t) = f(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\omega}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

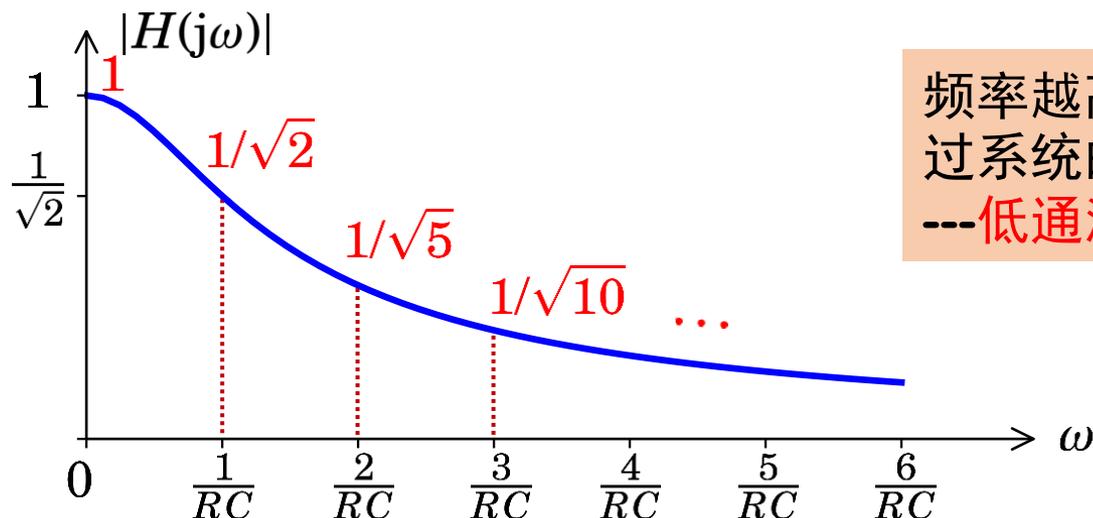


6.1-2 微分方程描述的LTI系统响应

作上例RC电路系统的幅度响应图

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$



频率越高，信号通过系统的损耗越大
---低通滤波器

信号功率衰减为原来的一半---3dB截止频率



6.1-3 电路系统的响应

□ 电路系统频率响应

- **方法1**：先建立微分方程，再利用**Fourier**变换
- **方法2**：直接建立电路元件**频域模型**，得出基本元件**广义阻抗**

$$v_R(t) = R i_R(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V_R(j\omega) = R I_R(j\omega) \Rightarrow Z_R = R$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V_L(j\omega) = (j\omega)L I_L(j\omega) \Rightarrow Z_L = j\omega L$$

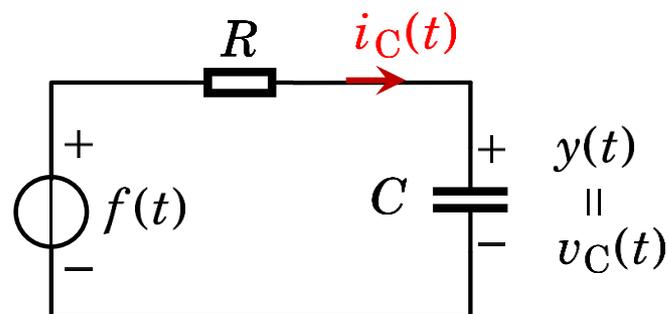
$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} I_C(j\omega) = (j\omega)C V_C(j\omega) \Rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



6.1-3 电路系统的响应

【例】求图示RC电路系统的频率响应和冲激响应

解：





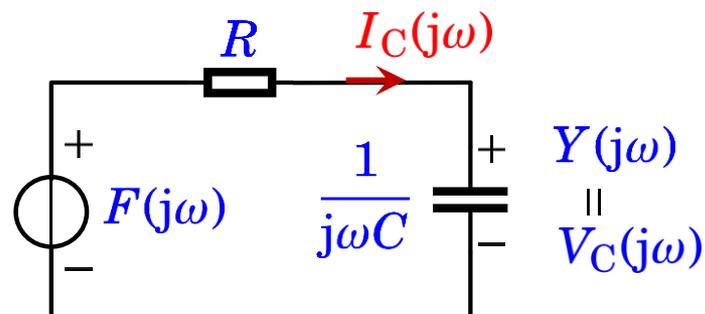
6.1-3 电路系统的响应

【例】求图示RC电路系统的频率响应和冲激响应

解：

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} F(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$





§6.2 周期信号通过系统响应的频域分析

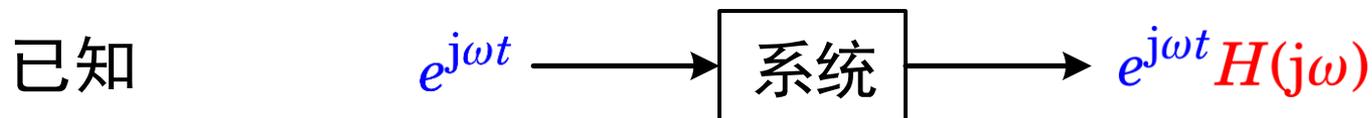
1. 正弦信号通过系统的响应
2. 任意周期信号通过系统的响应



6.2-1 正弦信号通过系统的响应

□ 设LTI系统输入激励信号：**正弦**

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(\omega_0 t + \theta) \\ &= \frac{1}{2j} \left[e^{j(\omega_0 t + \theta)} - e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2j} \left[H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} - H(-j\omega_0) e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} - \left(H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} \right)^* \right] \\ &= \mathbf{Im} \left\{ H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} \right\} = |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \theta) \end{aligned}$$

$h(t)$ 实信号：
共轭对称
 $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$

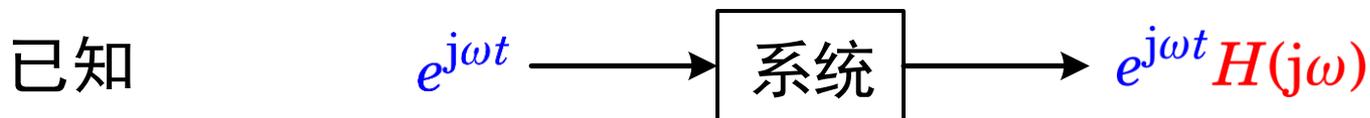


6.2-1 正弦信号通过系统的响应

□ 设LTI系统输入激励信号：余弦

$$f(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right]$$



$$y(t) = \frac{1}{2} \left[H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} + H(-j\omega_0) e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} + \left(H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} \right)^* \right]$$

$$= \text{Re} \left\{ H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} \right\} = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \theta)$$

$h(t)$ 实信号：
共轭对称
 $H(j\omega) = H^*(-j\omega)$



6.2-1 正弦信号通过系统的响应

正弦信号通过系统的响应

$$\begin{aligned} f(t) = \sin(\omega_0 t + \theta) \quad y(t) &= \mathbf{Im} \left\{ H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} \right\} \\ &= |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) = \cos(\omega_0 t + \theta) \quad y(t) &= \mathbf{Re} \left\{ H(j\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \theta)} \right\} \\ &= |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0) + \theta) \end{aligned}$$

- 正弦信号作用于LTI系统时，其零状态响应 $y(t)$ 仍为同频率信号
- $y(t)$ 的幅度由系统的幅度响应 $|H(j\omega_0)|$ 确定
- $y(t)$ 的相位相对于输入信号偏移 $\varphi(\omega_0)$ ，即输出延迟 $-\frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}$



6.2-1 正弦信号通过系统的响应

【例】已知LTI系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ ，求输入信号为 $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ 的稳态响应 $y(t)$

解：

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left\{ H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{j\omega_0 t}}{\alpha + j\omega_0} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\alpha - j\omega_0) e^{j\omega_0 t}}{\alpha^2 + \omega_0^2} \right\} \\ &= \frac{\alpha \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)}{\alpha^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$



6.2-2 任意周期信号通过系统的响应

□ 周期 T_0 的周期信号 $f(t)$ ，其Fourier级数展开

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



$f(t), h(t)$ 实信号:

共轭对称

$$H(j\omega) = H^*(-j\omega)$$

$$C_n = C_{-n}^*$$

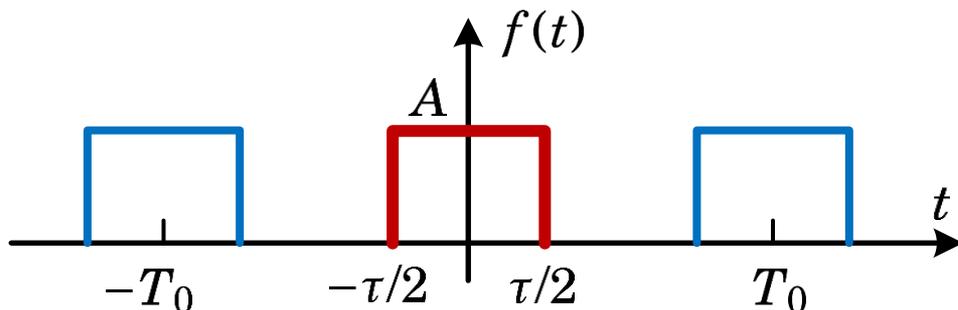
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$= C_0 H(j0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} H(-jn\omega_0) e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = C_0 H(j0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ C_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

6.2-2 任意周期信号通过系统的响应

【例】求图示周期矩形脉冲信号通过系统 $H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ 的响应 $y(t)$



$$C_n = \frac{\tau A}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

实数

解:
$$y(t) = C_0 H(j0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ C_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

$$= \frac{\tau A}{\alpha T_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ C_n \frac{e^{jn\omega_0 t}}{\alpha + jn\omega_0} \right\}$$

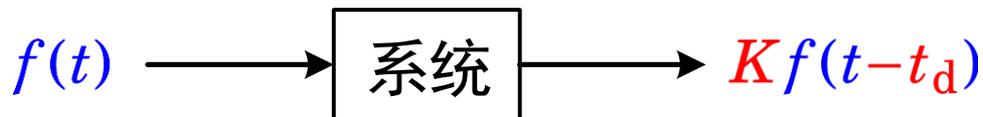
$$= \frac{\tau A}{\alpha T_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\alpha \cos(n\omega_0 t) + n\omega_0 \sin(n\omega_0 t)}{\alpha^2 + n^2\omega_0^2}$$



§6.3 无失真传输系统与理想滤波器



6.3-1 无失真传输系统



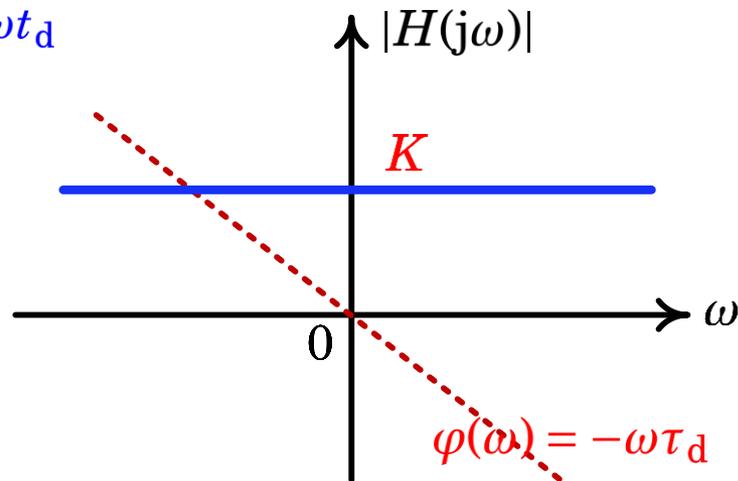
- 信号通过传输系统，无任何失真
- 输出信号只在幅度和出现时间上异于输入信号，波形不变

□ Fourier变换时移特性

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}[Kf(t-t_d)] = KF(j\omega)e^{-j\omega t_d}$$

□ 频率响应

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_d}$$

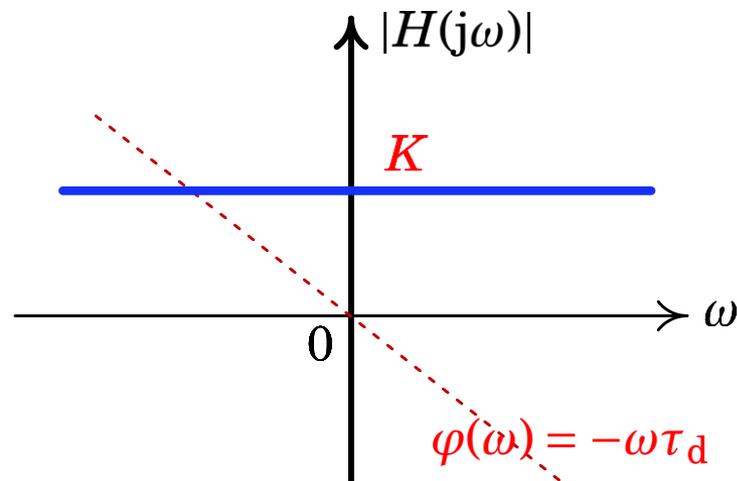




6.3-1 无失真传输系统

无失真传输系统频率响应

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$



□ 无失真传输系统应满足：

- 幅度响应在整个频率范围内为 K ，即系统带宽无穷大
- 相位响应在整个频率范围内与 ω 成线性关系

□ 实际物理系统：

- 系统带宽不可能无穷大，存在幅度失真
- 相位响应也不是频率的线性函数，存在相位失真
- 近似：系统带宽大于信号带宽，幅度响应较平坦、相位响应近线性



【例】 已知某LTI系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ ，求幅度响应、相位响应，输入 $f(t) = \sin t + \sin(3t)$ 下的稳态响应

解： $|H(j\omega)| = \left| \frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right| = 1$

分子： $1-j\omega = \sqrt{1+\omega^2} e^{j\varphi_1(\omega)} = \sqrt{1+\omega^2} [\cos(\varphi_1(\omega)) + j\sin(\varphi_1(\omega))]$

$\Rightarrow \tan(\varphi_1(\omega)) = -\omega \Rightarrow \varphi_1(\omega) = -\arctan(\omega)$

分母： $1+j\omega = \sqrt{1+\omega^2} e^{j\varphi_2(\omega)} = \sqrt{1+\omega^2} [\cos(\varphi_2(\omega)) + j\sin(\varphi_2(\omega))]$

$\Rightarrow \tan(\varphi_2(\omega)) = \omega \Rightarrow \varphi_2(\omega) = \arctan(\omega)$

$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) = -2\arctan(\omega)$



【例】 已知某LTI系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ ，求**幅度响应**、**相位响应**，输入 $f(t) = \sin t + \sin(3t)$ 下的**稳态响应**

解： $|H(j\omega)| = 1$ 对所有频率均为常数**1**——全通系统
 $\varphi(\omega) = -2 \arctan(\omega)$ 不是频率的线性函数——相位失真

$$f(t) = \sin t + \sin(3t) \quad H(j\omega) = e^{-j2 \arctan(\omega)}$$

$$y(t) = \text{Im} \left\{ H(j1)e^{jt} \right\} + \text{Im} \left\{ H(j3)e^{j3t} \right\} \quad \text{正弦信号通过系统}$$

$$= |H(j1)| \sin(1 \cdot t + \varphi(1)) + |H(j3)| \sin(3t + \varphi(3))$$

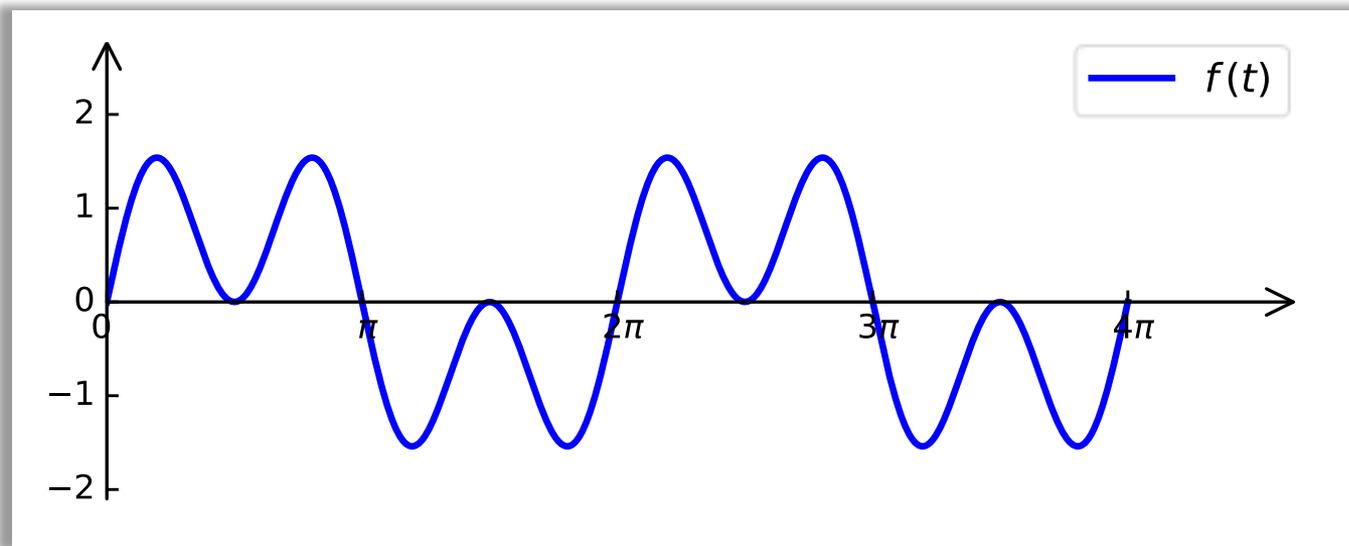
$$= \sin(t - 0.5\pi) + \sin(3t - 0.795\pi)$$

【例】已知某LTI系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ ，求幅度响应、相位响应，输入 $f(t) = \sin t + \sin(3t)$ 下的稳态响应

解： $|H(j\omega)| = 1$ 对所有频率均为常数1——全通系统

$\varphi(\omega) = -2 \arctan(\omega)$ 不是频率的线性函数——相位失真

$$y(t) = \sin(t - 0.5\pi) + \sin(3t - 0.795\pi)$$

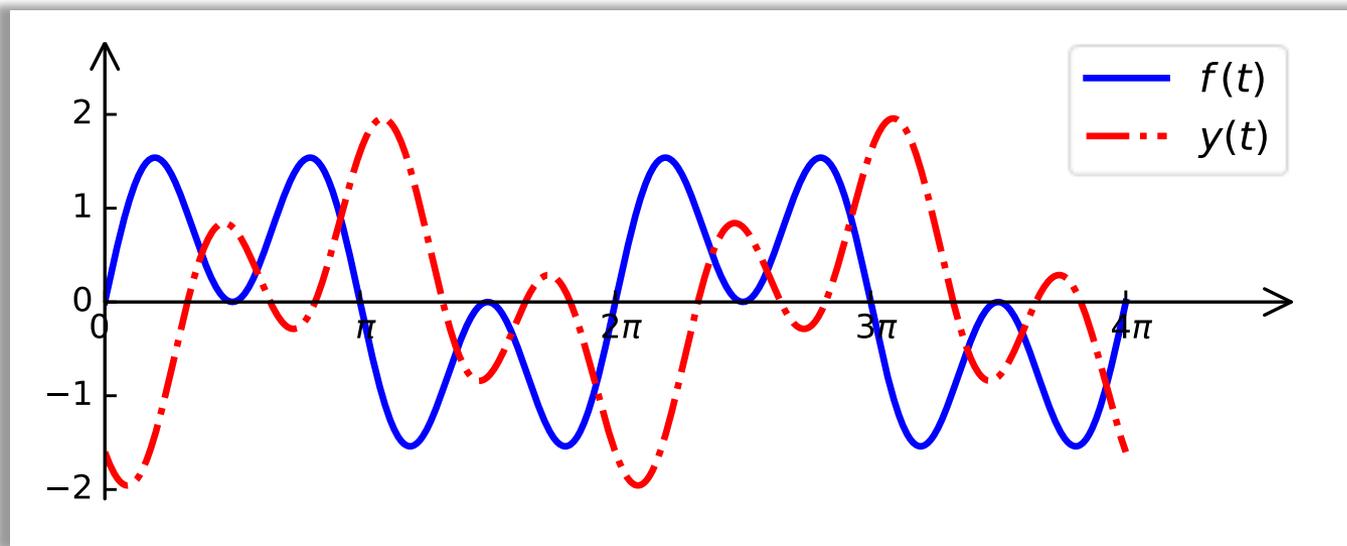


【例】已知某LTI系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$ ，求幅度响应、相位响应，输入 $f(t) = \sin t + \sin(3t)$ 下的稳态响应

解： $|H(j\omega)| = 1$ 对所有频率均为常数1——全通系统

$\varphi(\omega) = -2 \arctan(\omega)$ 不是频率的线性函数——相位失真

$$y(t) = \sin(t - 0.5\pi) + \sin(3t - 0.795\pi)$$

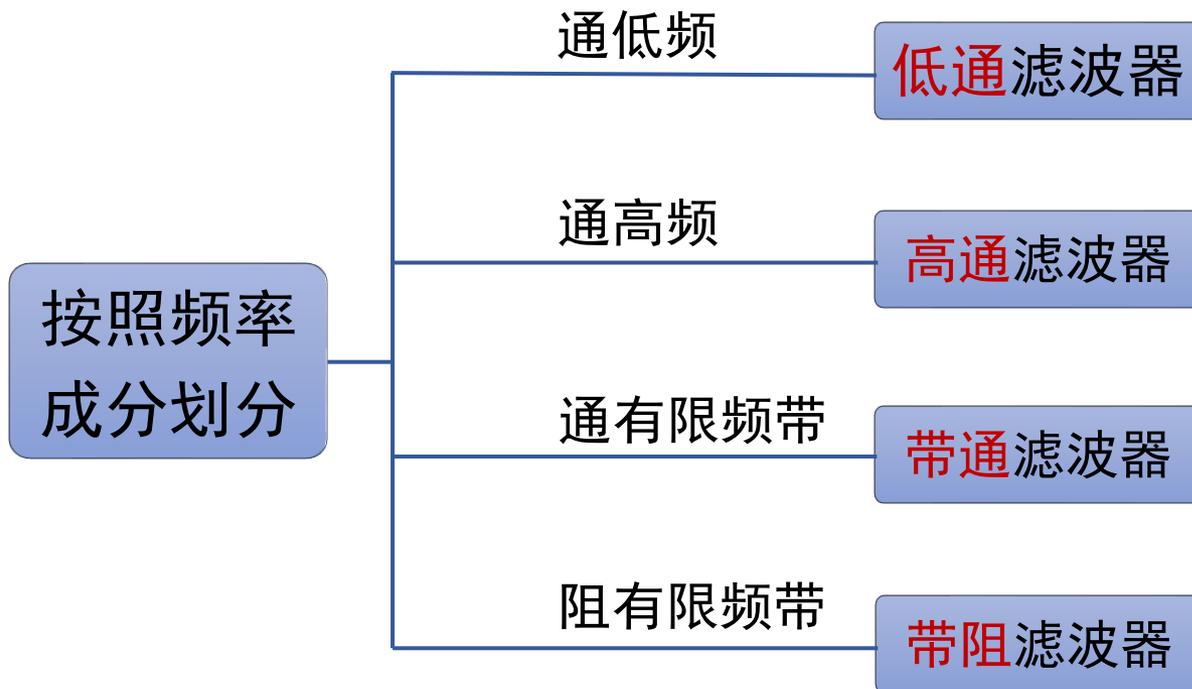




6.3-2 理想滤波器

□ 滤波器：信号的部分频率分量通过，其他频率分量少量通过

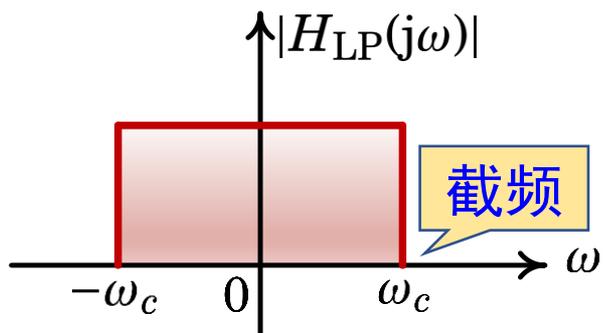
- 任何系统均可视作滤波器



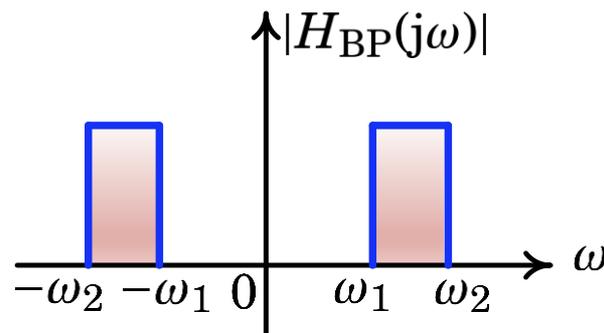


6.3-2 理想滤波器

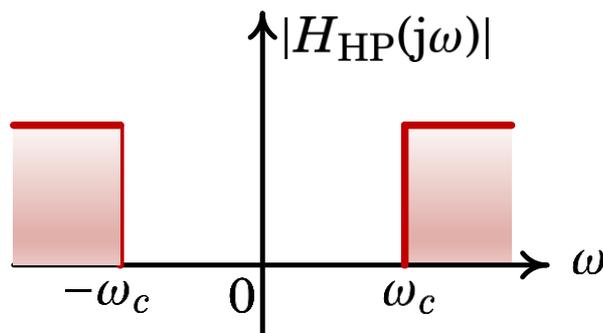
□ 滤波器：信号的部分频率分量通过，其他频率分量少量通过



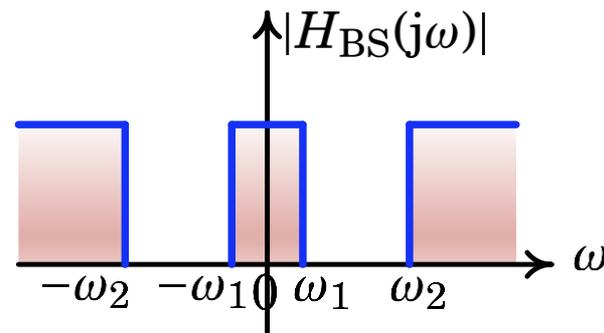
理想低通滤波器幅度响应



理想带通滤波器幅度响应



理想高通滤波器幅度响应



理想带阻滤波器幅度响应

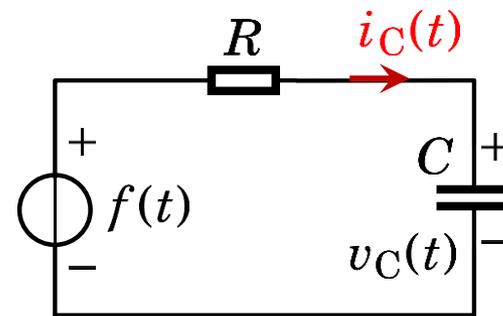


6.3-3 理想低通滤波器

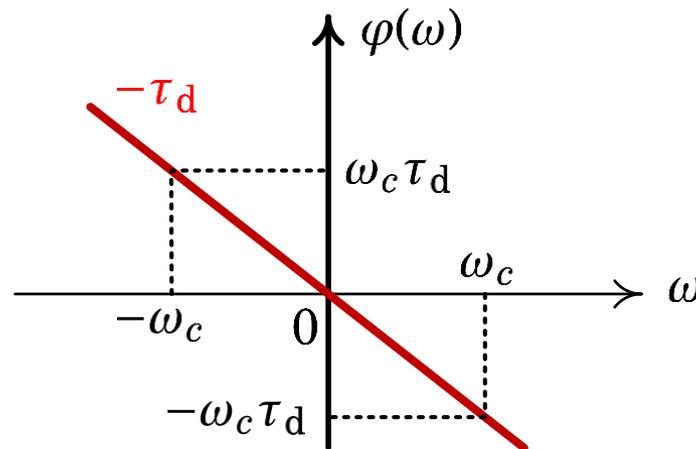
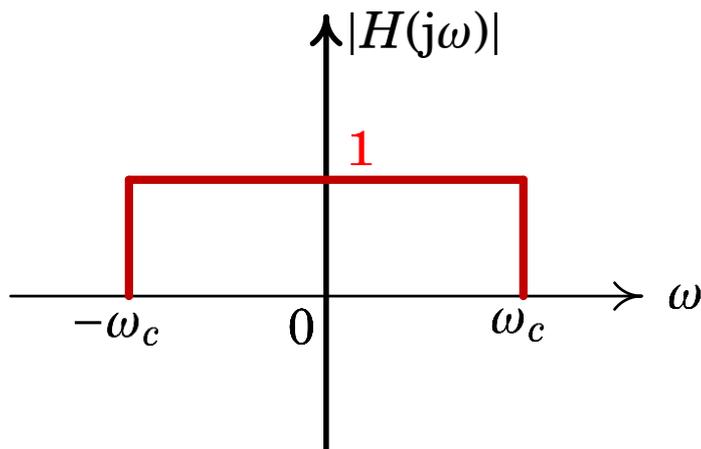
理想低通滤波器

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$= p_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$$



实际RC低通滤波器
区别于理想!

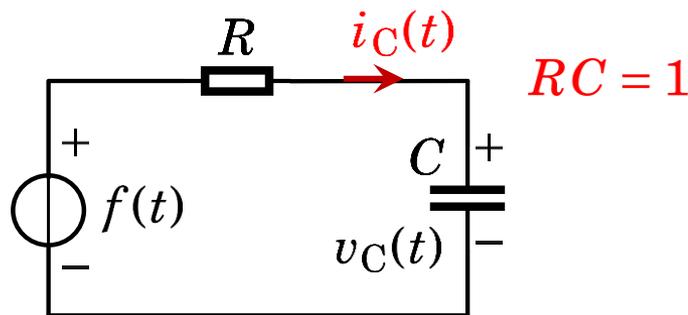
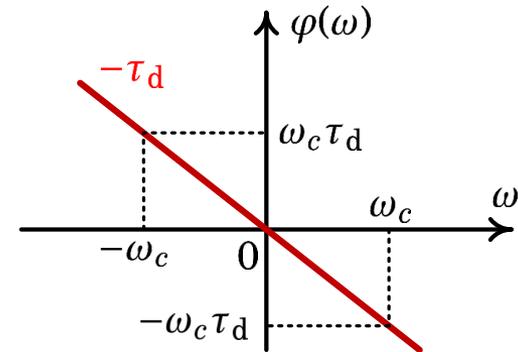
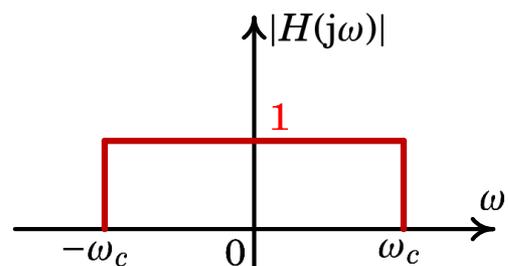


线性相位理想低通滤波器的频率响应

6.3-3 理想低通滤波器

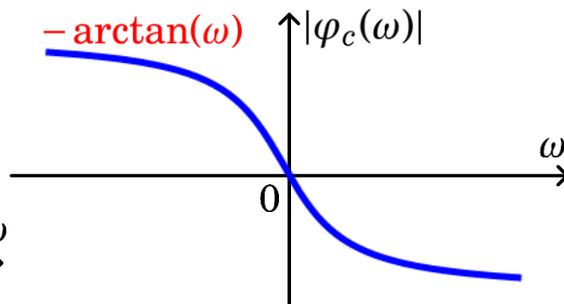
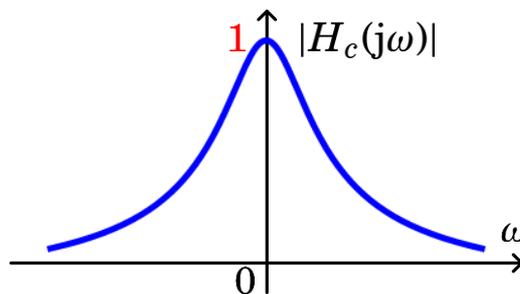
理想低通滤波器

$$H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$



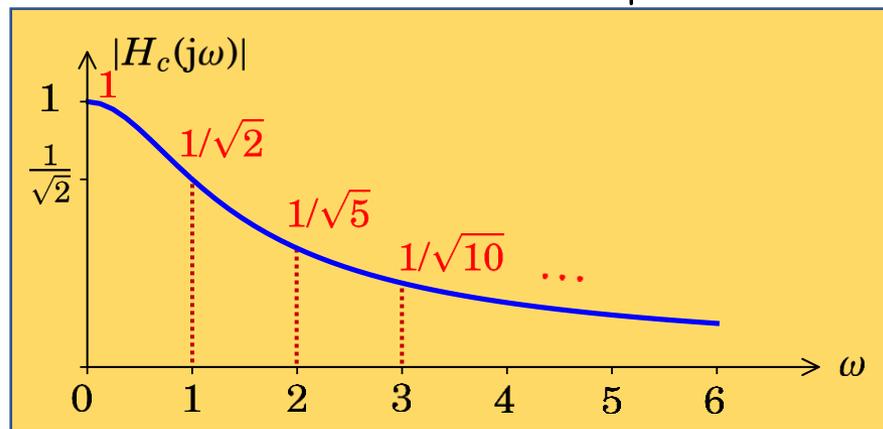
实际RC低通滤波器

区别于理想!

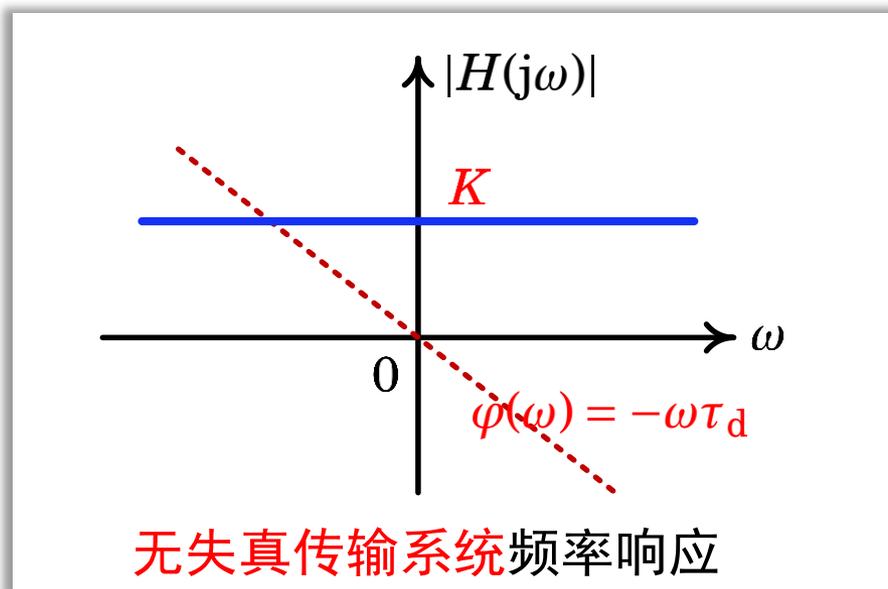
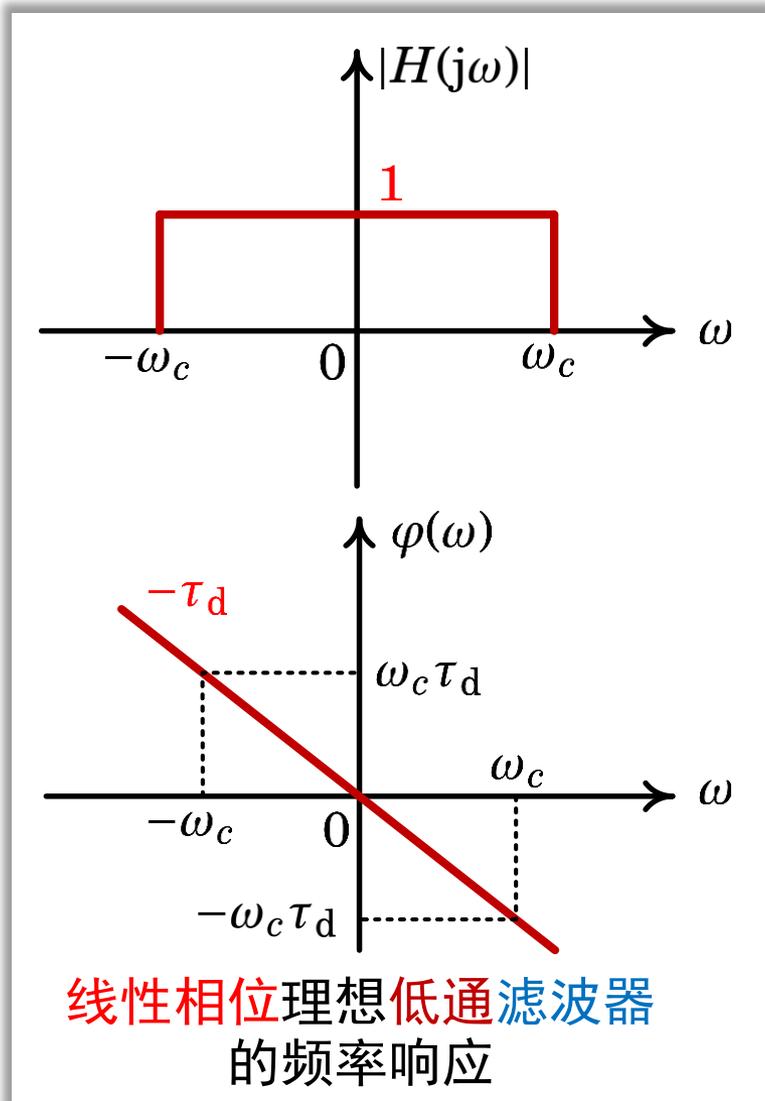


$$H_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j\arctan(\omega)}$$

非矩形
非线性相位



6.3-3 理想低通滤波器



- 通频带有限，也称带限系统
- 信号会失真，取决于通带宽度和输入信号的频带——信号与系统频率匹配
- 近似认为无失真传输：系统通带宽度大于信号带宽



6.3-4 理想低通滤波器的冲激响应



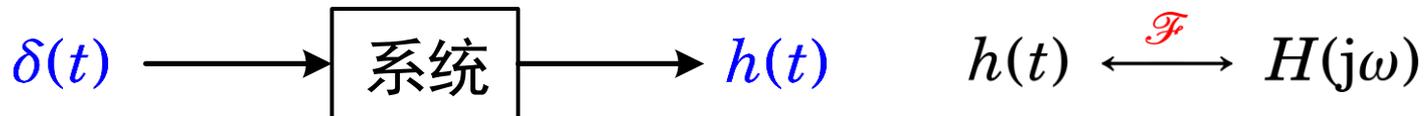
$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

理想低通滤波器

$$H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$$

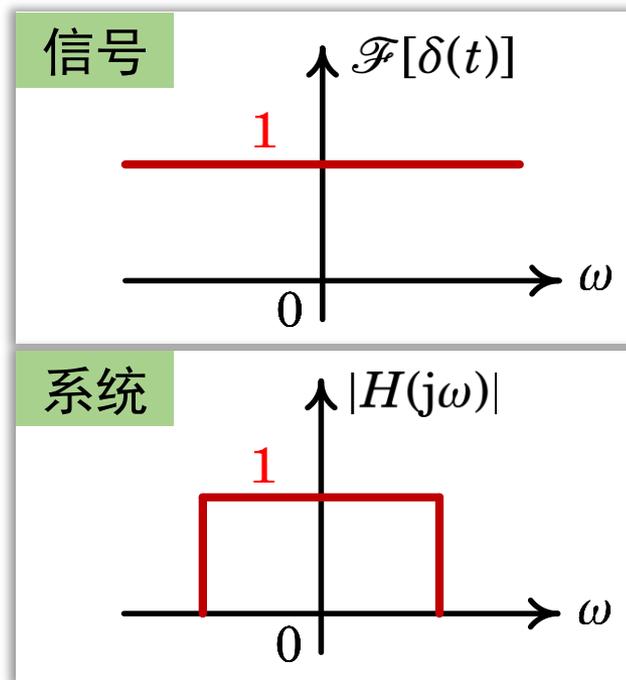
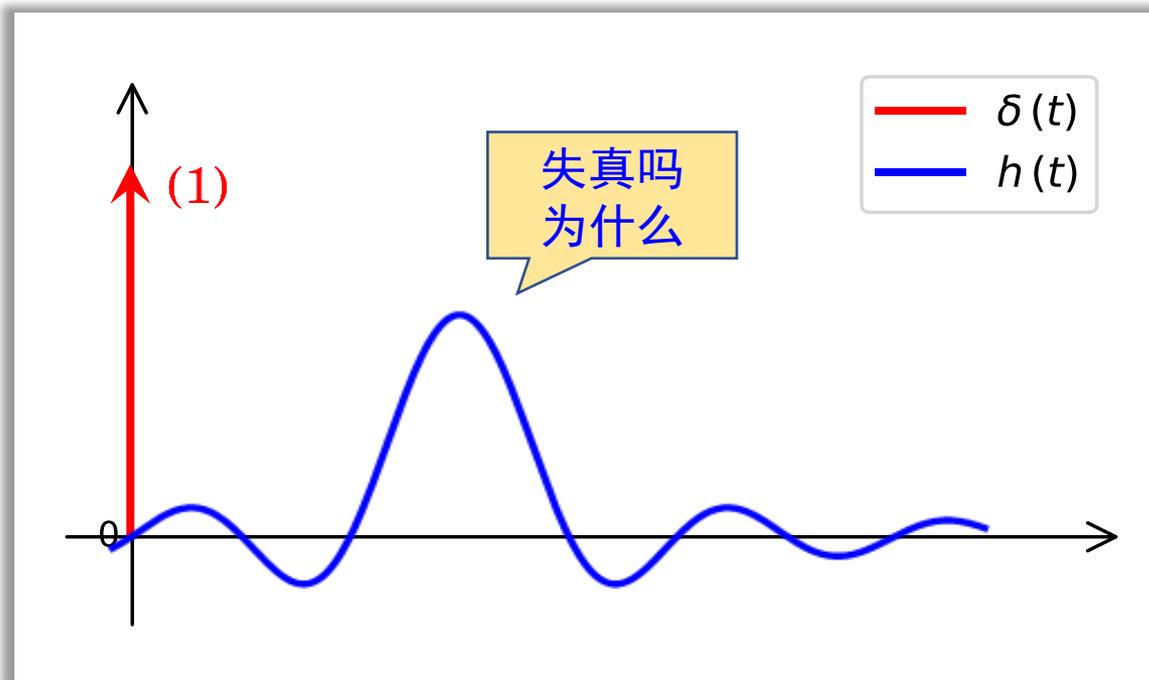
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_d} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_d)} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \cos(\omega(t-t_d)) d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t-t_d)) \end{aligned}$$

6.3-4 理想低通滤波器的冲激响应

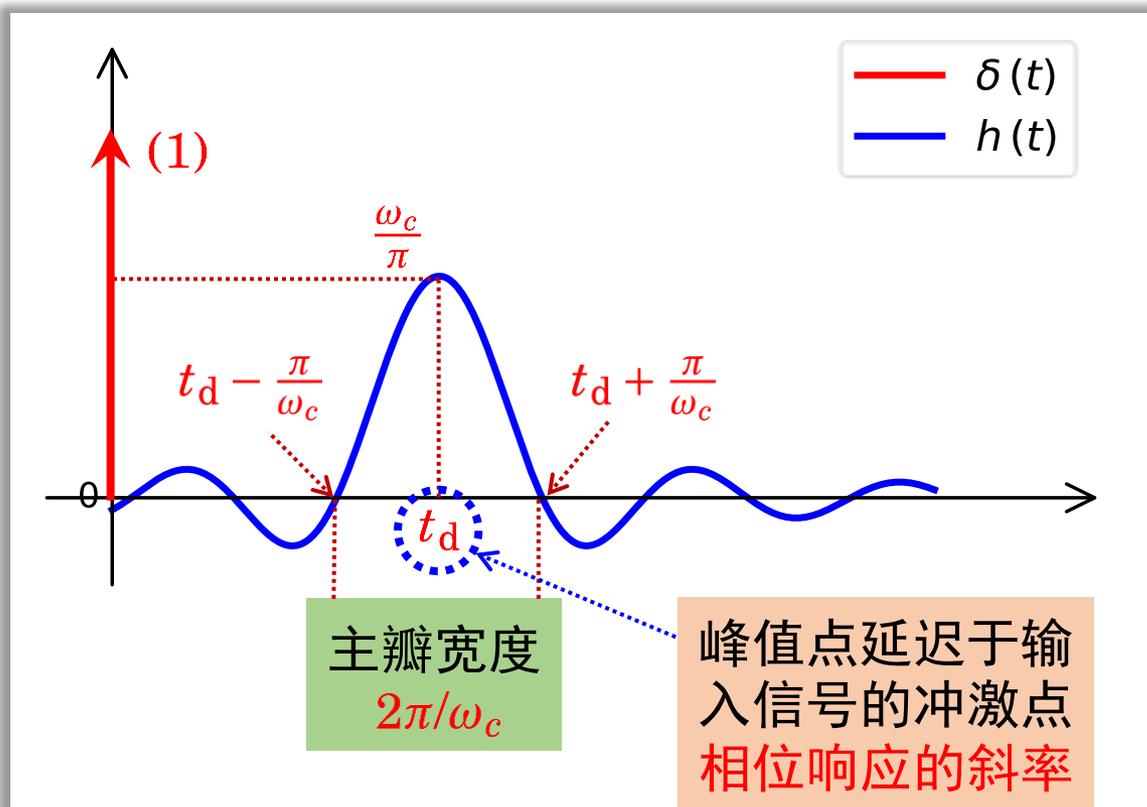
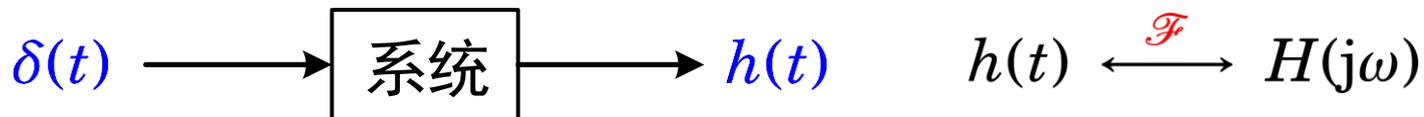


$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t - t_d))$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$



6.3-4 理想低通滤波器的冲激响应



$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t - t_d))$$

$$\sin(\omega_c(t - t_d)) = 0$$

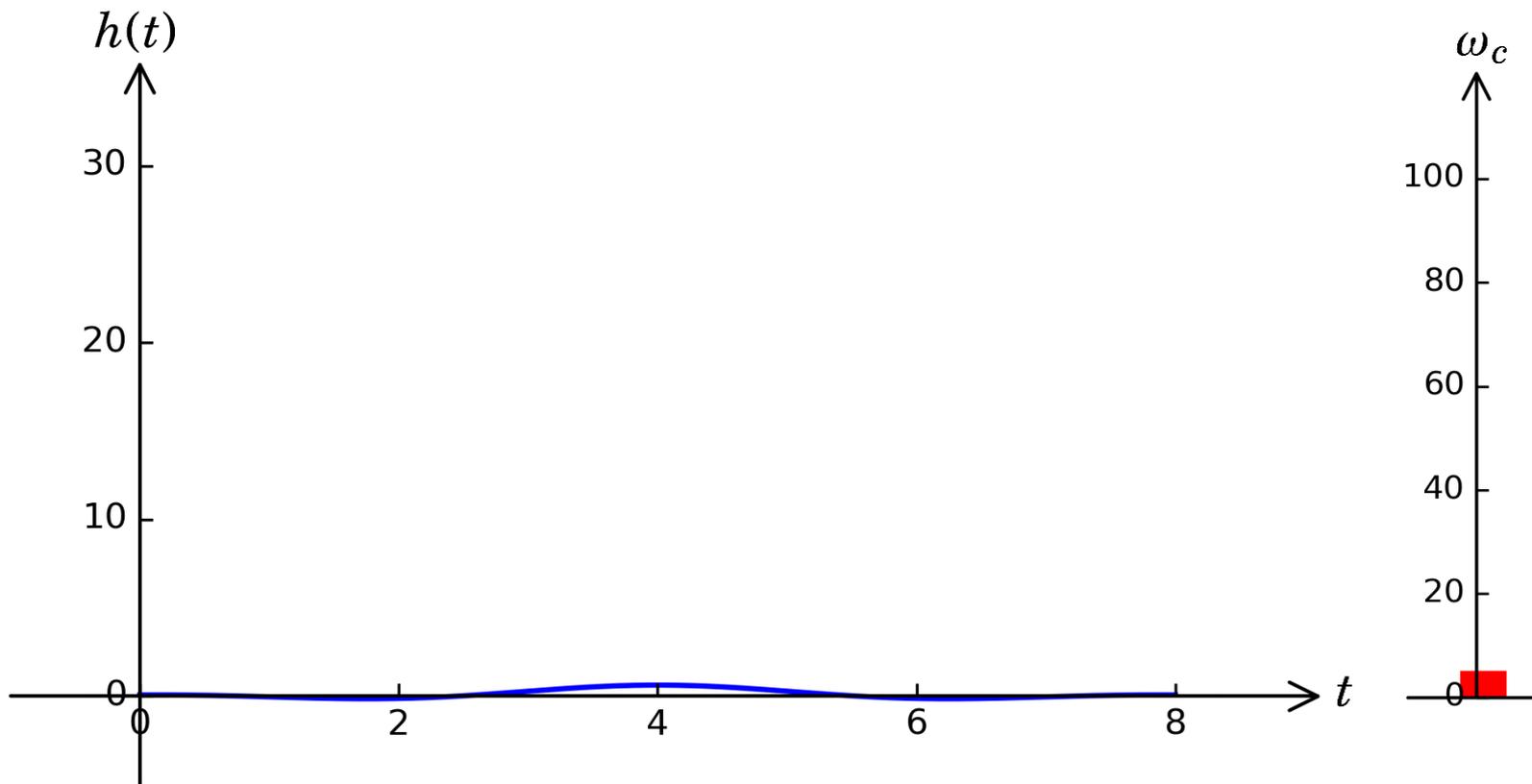
$$\omega_c(t - t_d) = \pm\pi$$

零点

- ω_c 越大，失真越小
- ω_c 无穷，接近不失真



6.3-4 理想低通滤波器的冲激响应



$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t - t_d))$$



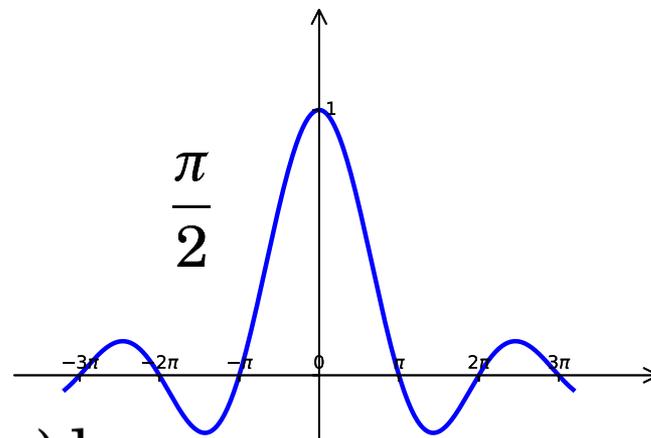
6.3-5 理想低通滤波器的阶跃响应



与冲激响应
什么关系?

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\
 &= \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-\infty}^t \text{Sa}(\omega_c(\tau - t_d)) d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \text{Sa}(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx
 \end{aligned}$$

$= x \quad dx = \omega_c d\tau$



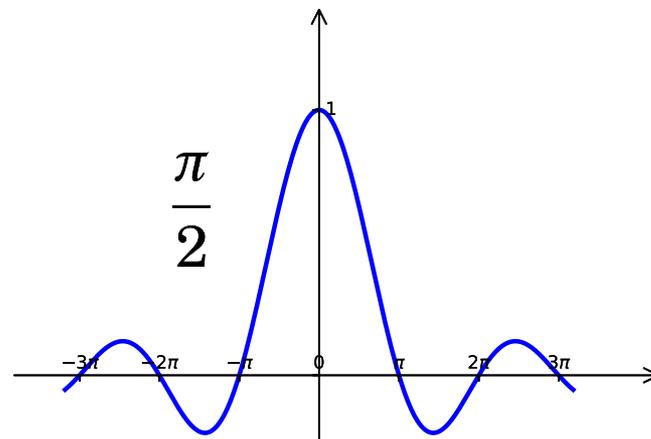


6.3-5 理想低通滤波器的阶跃响应



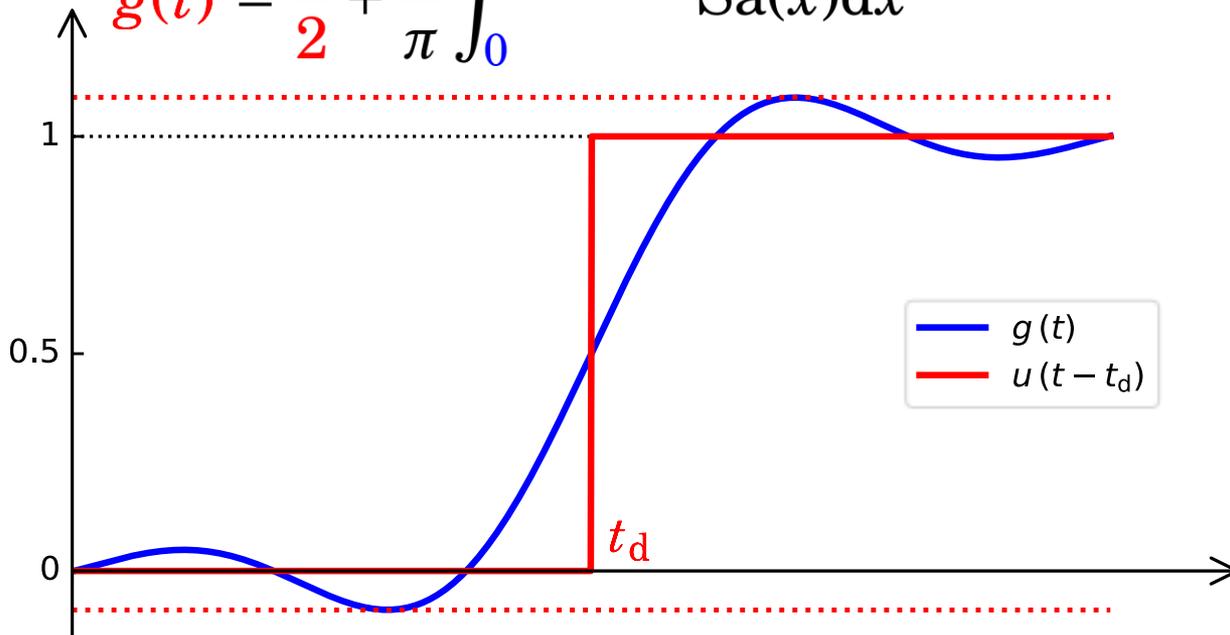
$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\
 &= \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-\infty}^t \text{Sa}(\omega_c(\tau - t_d)) d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx
 \end{aligned}$$

$= x \quad dx = \omega_c d\tau$

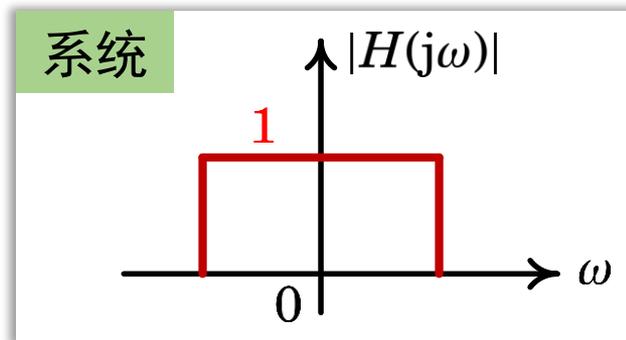
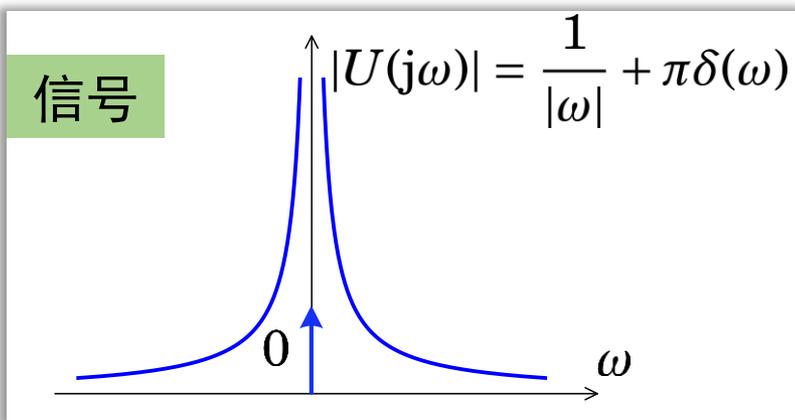


6.3-5 理想低通滤波器的阶跃响应

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx$$

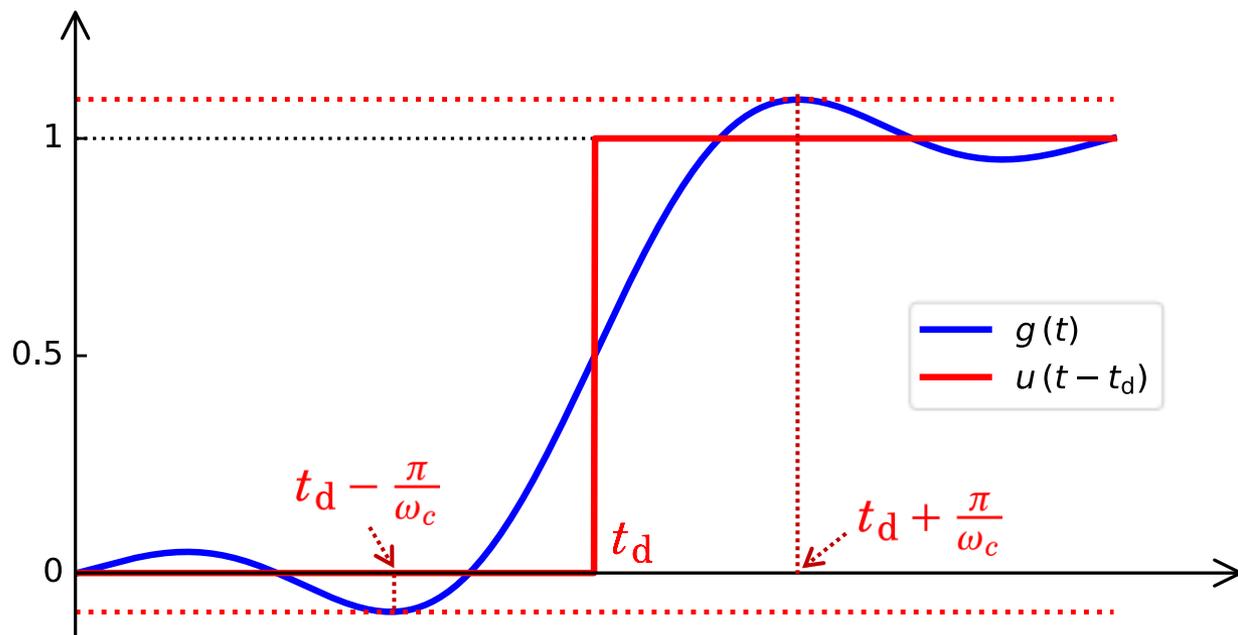


失真吗
为什么





6.3-5 理想低通滤波器的阶跃响应



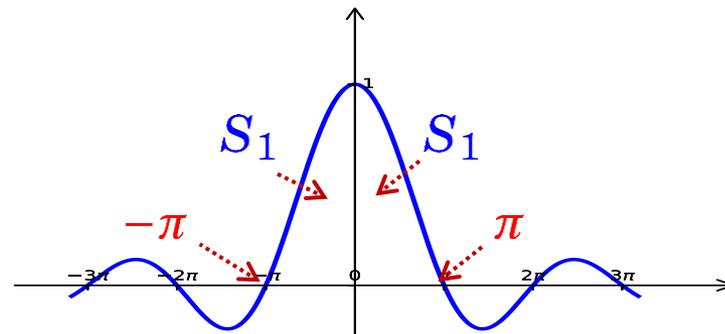
- 过冲与振荡
- 上升时间：最小值上升到最大值的时间

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

- 间断点前后振荡9%超调——Gibbs现象

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx$$

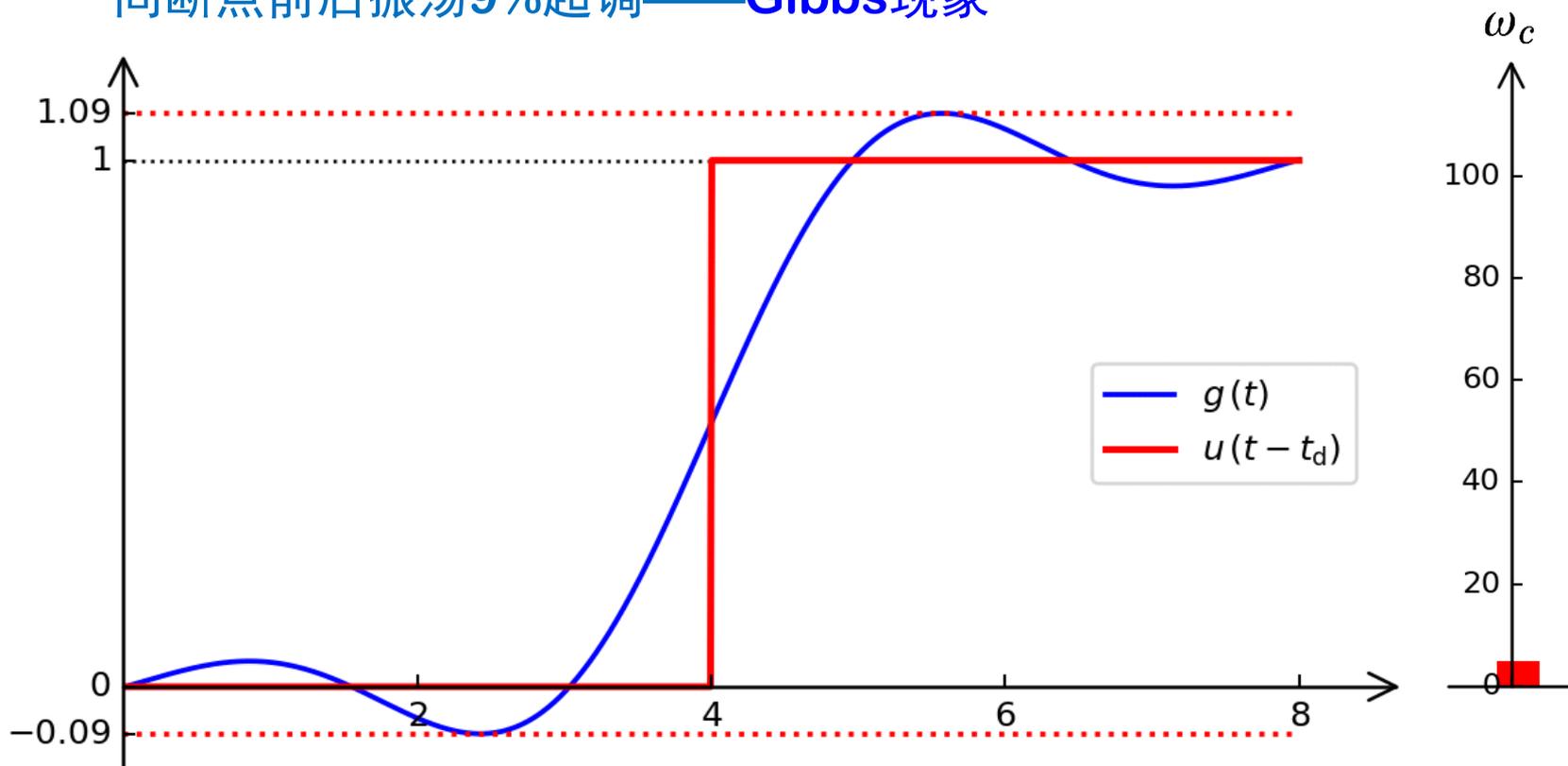
$$g_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{S_1}{\pi} \quad g_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{S_1}{\pi}$$





6.3-5 理想低通滤波器的阶跃响应

间断点前后振荡9%超调——Gibbs现象



$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx$$



6.3-6 理想低通滤波器说明与举例

□ 结论

- 输出响应**延迟时间**取决于滤波器**相位响应的斜率** t_d
- 输出响应在输入信号**间断点**处的波形为**逐渐上升**或**下降**，上升/下降时间与通频带宽 $2\omega_c$ 成**反比**
- 滤波器**通带宽度**与输入信号**带宽不匹配**时，输出**失真**：信号带宽**越大**于系统通频带，失真越大
- 实际系统：特性类似理想低通滤波器，但为**因果系统**



【例】求信号 $f(t) = \text{Sa}(t) \cos(2t)$ 通过线性相位理想低通滤波器的响应

解：

$$H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$$

$$F(j\omega) = \mathcal{F} \left[\text{Sa}(t) \left(\frac{1}{2} e^{j2t} + \frac{1}{2} e^{-j2t} \right) \right]$$

$$\text{Sa}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi p_2(\omega)$$

↓
频移特性

$$= \frac{\pi}{2} [p_2(\omega - 2) + p_2(\omega + 2)]$$



【例】求信号 $f(t) = \text{Sa}(t) \cos(2t)$ 通过线性相位理想低通滤波器的响应

解: $F(j\omega) = \frac{\pi}{2} [p_2(\omega - 2) + p_2(\omega + 2)]$

$H(j\omega) = p_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$

$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot F(j\omega)$

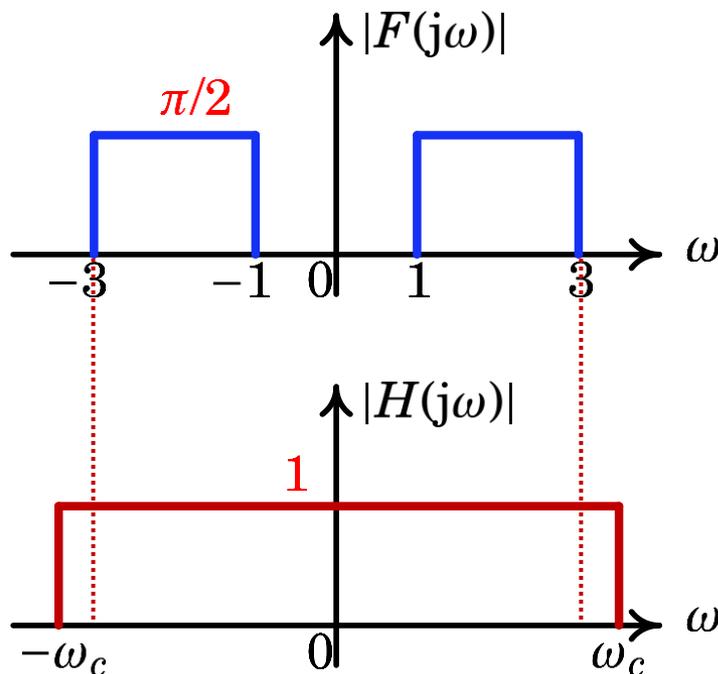
情形一: $\omega_c > 3$, 全通

$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_d} \cdot F(j\omega)$

↓ 时移特性

$f(t - t_d) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_d} \cdot F(j\omega)$

$y(t) = f(t - t_d) = \text{Sa}(t - t_d) \cos(2(t - t_d))$

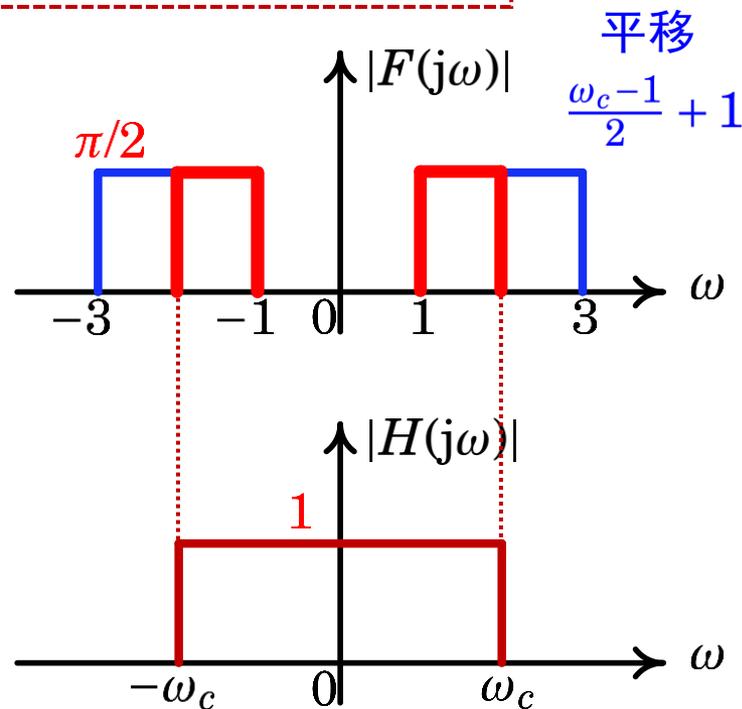


【例】求信号 $f(t) = \text{Sa}(t) \cos(2t)$ 通过线性相位理想低通滤波器的响应

解：情形二： $1 < \omega_c < 3$ ，部分通

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_d} \cdot \frac{\pi}{2} \left[p_{\omega_c-1} \left(\omega - \frac{\omega_c+1}{2} \right) + p_{\omega_c-1} \left(\omega + \frac{\omega_c+1}{2} \right) \right] F_1(j\omega)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_c-1}{2} \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\omega_c+1}{2}$$



求等效 $F_1(j\omega)$ 和 $f_1(t)$

【例】求信号 $f(t) = \text{Sa}(t) \cos(2t)$ 通过线性相位理想低通滤波器的响应

解：情形二： $1 < \omega_c < 3$ ，部分通

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_d} \cdot \frac{\pi}{2} \left[p_{\omega_c-1} \left(\omega - \frac{\omega_c+1}{2} \right) + p_{\omega_c-1} \left(\omega + \frac{\omega_c+1}{2} \right) \right]$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_c-1}{2} \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\omega_c+1}{2}$$

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{2} [\pi p_{2\omega_0} (\omega - \bar{\omega}_0) + \pi p_{2\omega_0} (\omega + \bar{\omega}_0)]$$

$$\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi p_{2\omega_0}(\omega)$$

↓ 频移特性

$$\omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t) e^{\pm j\bar{\omega}_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi p_{2\omega_0}(\omega \mp \bar{\omega}_0)$$

$$f_1(t) = \omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t) \cos(\bar{\omega}_0 t)$$



【例】求信号 $f(t) = \text{Sa}(t) \cos(2t)$ 通过线性相位理想低通滤波器的响应

解：情形二： $1 < \omega_c < 3$ ，部分通 $f_1(t) = \omega_0 \text{Sa}(\omega_0 t) \cos(\bar{\omega}_0 t)$

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_d} \cdot F_1(j\omega)$$

↓ 时移特性

$$f_1(t - t_d) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_d} \cdot F_1(j\omega)$$

$$y(t) = f_1(t - t_d) = \omega_0 \text{Sa}(\omega_0(t - t_d)) \cos(\bar{\omega}_0(t - t_d))$$



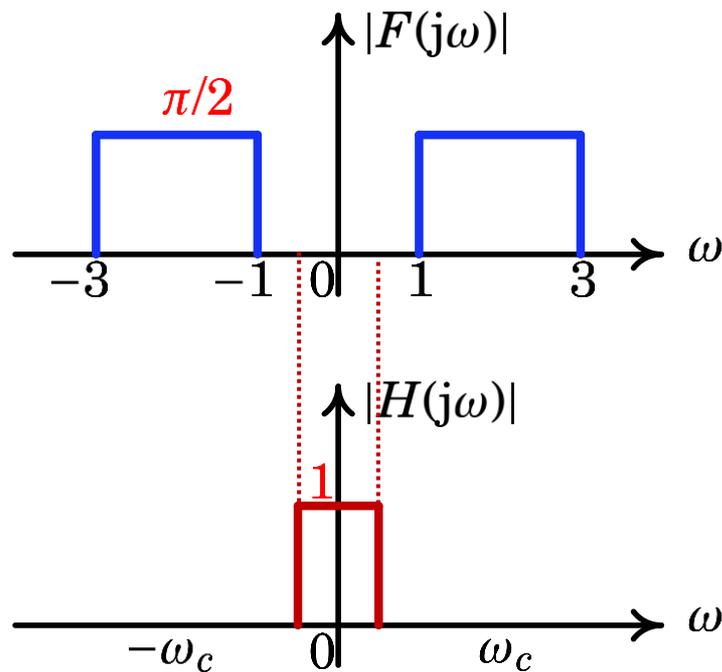
【例】求信号 $f(t) = \text{Sa}(t) \cos(2t)$ 通过线性相位理想低通滤波器的响应

解：情形三： $\omega_c < 1$ ，全阻

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot F(j\omega)$$

$$= 0$$

$$y(t) = 0$$





§6.4 时域采样与采样定理

$$f(t) \xrightarrow{\text{采样}} f(nT)$$

1. 信号的时域采样
2. 时域采样定理
3. 信号的重建



6.4-1 信号的时域采样

□ 连续时间信号表示采样信号

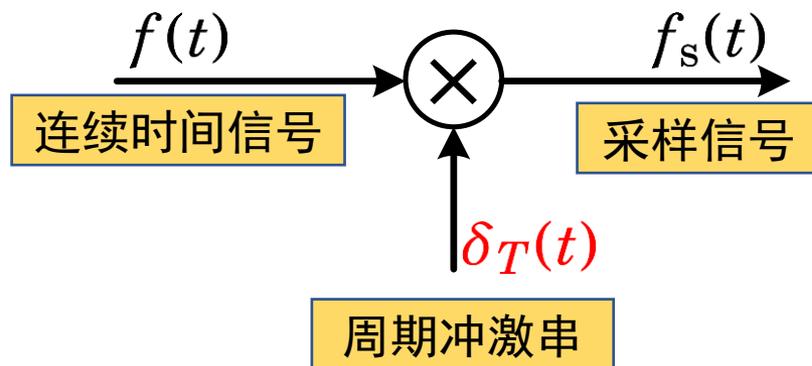
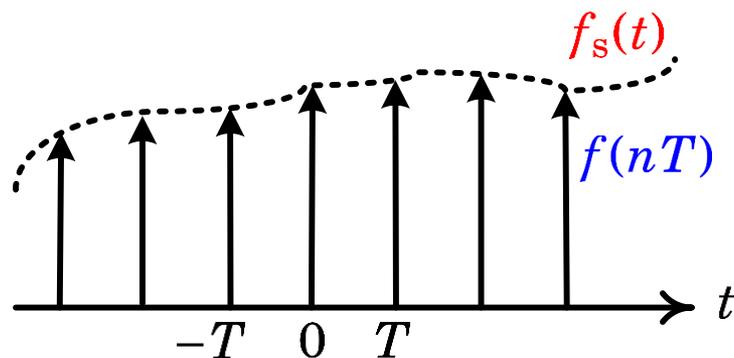
$$f_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT)$$

$$= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$= f(t)\delta_T(t)$$

- 采样间隔: T
- 采样频率: $f_s = 1/T$
- 采样角频率: $\omega_s = 2\pi/T$





6.4-1 信号的时域采样

$$\delta_T(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$$

↓ 乘积特性

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j(\omega - n\omega_s)) \end{aligned}$$

带限信号采样后的频谱函数

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{F(j(\omega - n\omega_s))}$$

$F_n(j\omega)$

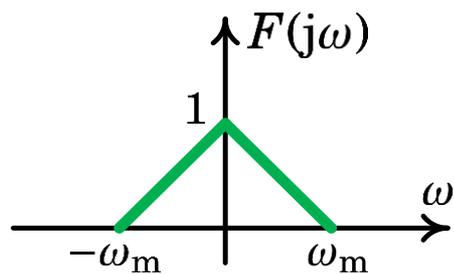
带限信号

$|\omega| < \omega_m$ 最高角频率

6.4-1 信号的时域采样

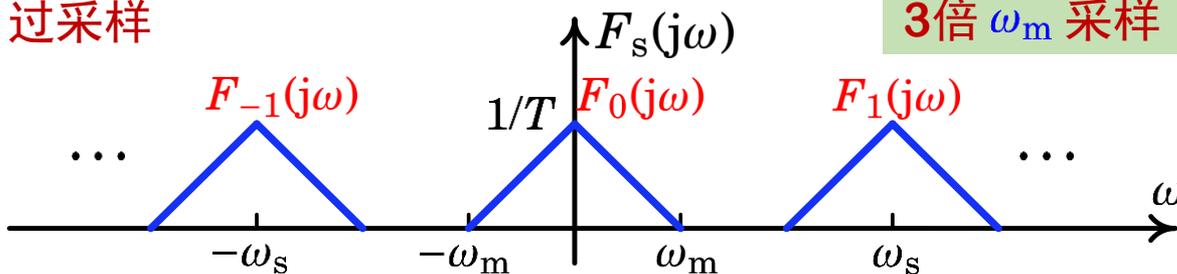
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{F(j(\omega - n\omega_s))}$$

$F_n(j\omega)$

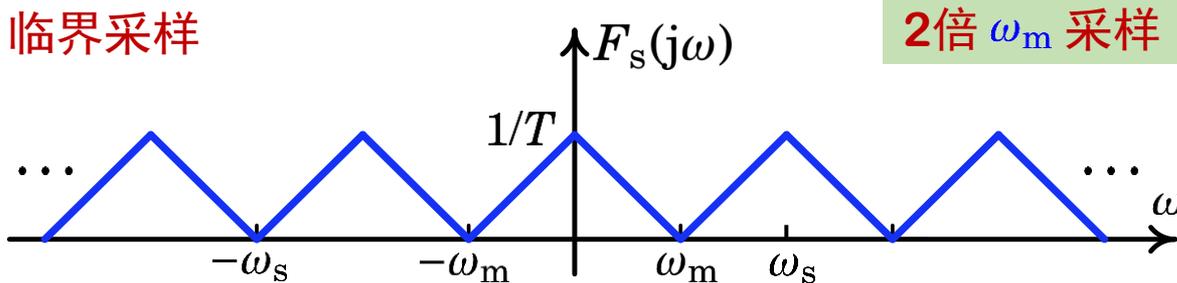


原始带限信号

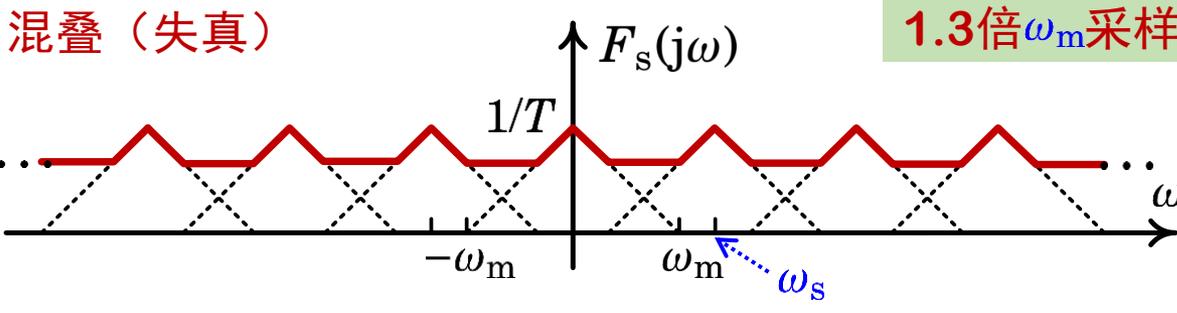
过采样



临界采样



混叠 (失真)



多大的采样
频率合适?



6.4-2 时域采样定理

时域采样定理

带限实信号 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m (频率为 f_m)，如果采样频率 f_s 满足 $f_s \geq 2f_m$ ，则信号可用等间隔采样值无失真表示。

👉 Nyquist 频率: $f_s = 2f_m$

👉 Nyquist 间隔: $T_s = 1/(2f_m)$

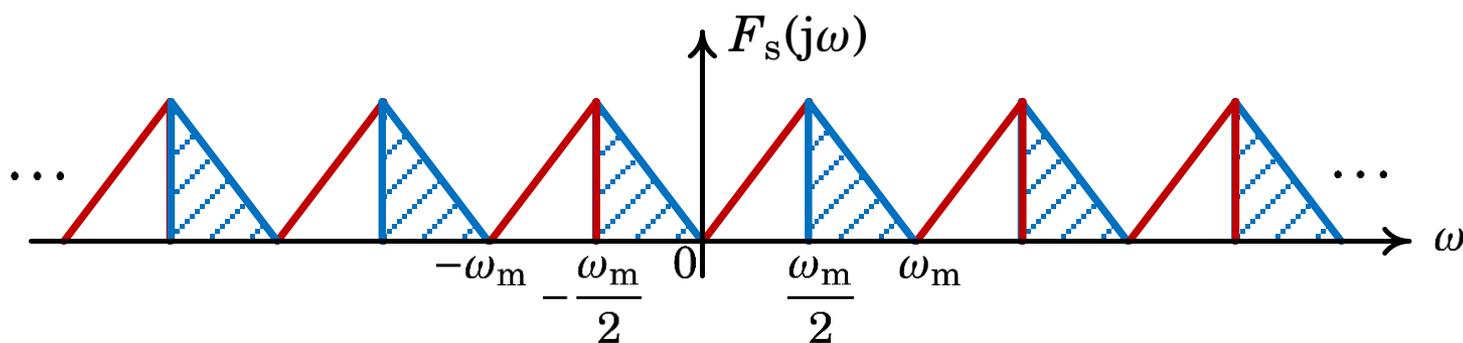
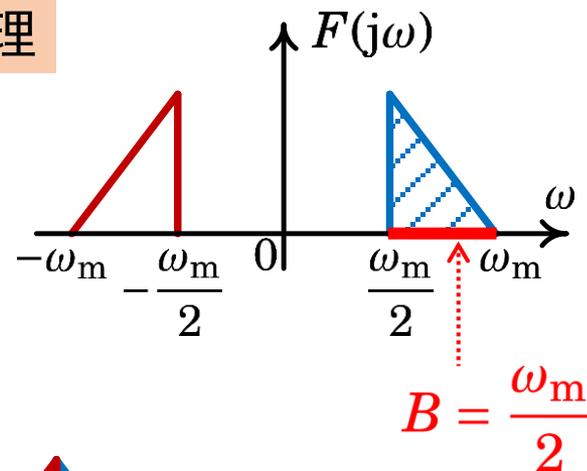
无失真恢复原信号的条件: **充分条件**

- $f(t)$ 是带限信号，即频谱函数 $F(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_m$
- 采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$

【例】 已知某带通实信号的频谱图，画出采样角频率为 $\omega_s = \omega_m$ 的采样信号频谱

不满足采样定理

解：
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - n\omega_s))$$



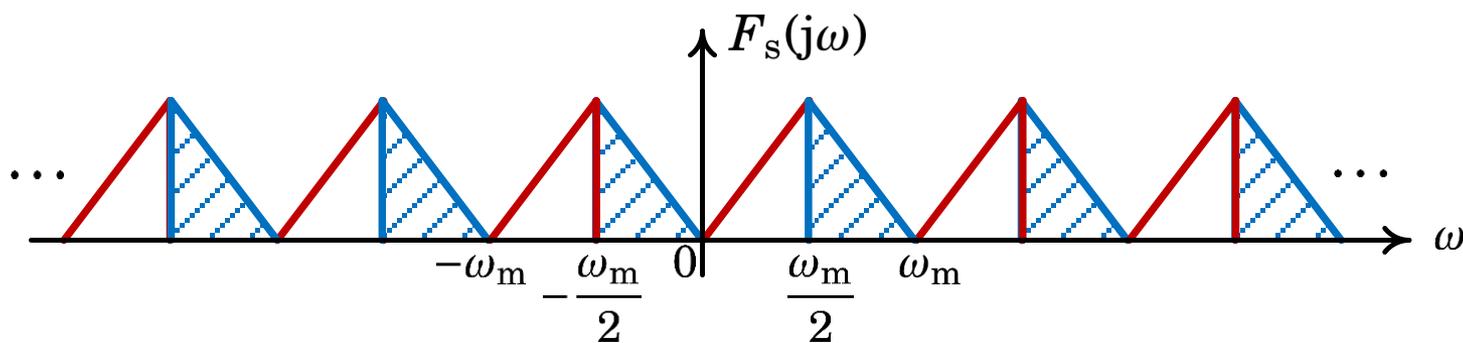
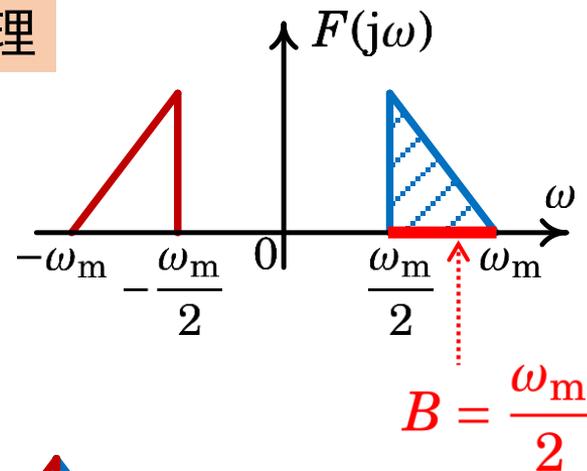
1. 采样定理是实信号采样后频谱不混叠的充分条件

如高频窄带信号

【例】已知某带通实信号的频谱图，画出采样角频率为 $\omega_s = \omega_m$ 的采样信号频谱

不满足采样定理

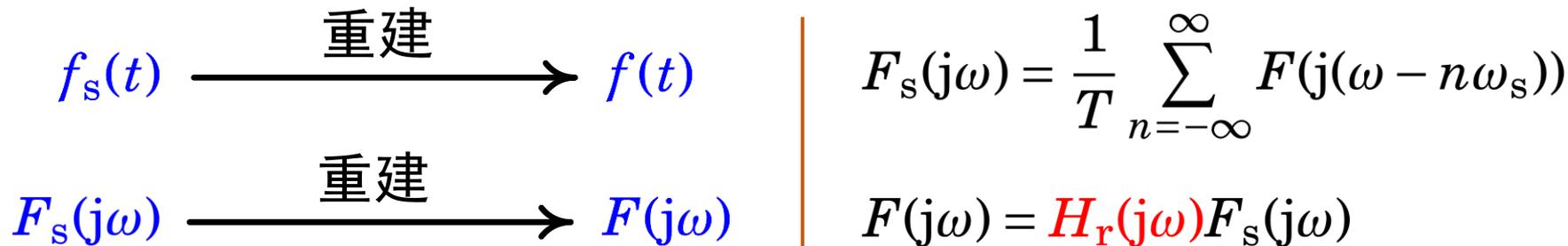
解：
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - n\omega_s))$$



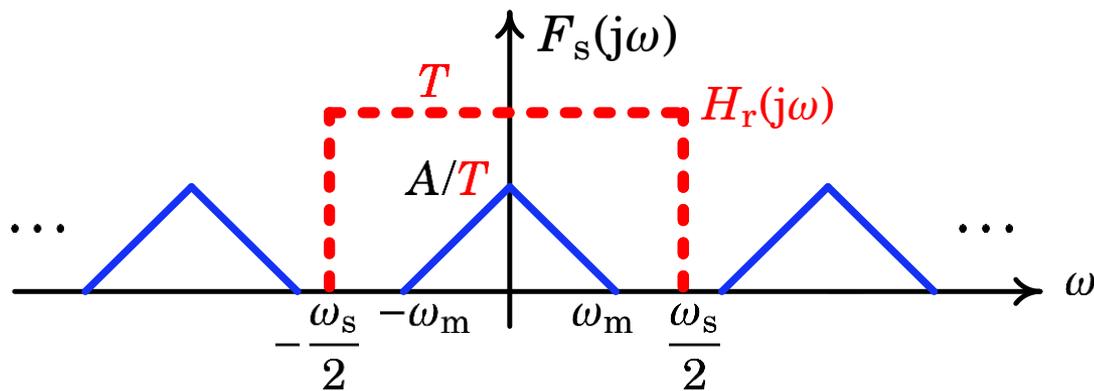
1. 采样定理是实信号采样后频谱不混叠的充分条件
2. 一般带通信号，信号最高频率 ω_m 是信号带宽 B 的整数倍，则不混叠的采样频率需不小于信号带宽的2倍： $\omega_s \geq 2B$



6.4-3 信号的重建



理想低通滤波器



理想低通滤波器截止角频率需满足： $\omega_m < \omega_c \leq \omega_s/2$



6.4-3 信号的重建

理想低通滤波器：用于采样信号理想重建、无相移

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} = T p_{2\omega_c}(\omega) \quad \omega_m < \omega_c \leq \frac{\omega_s}{2}$$

重建过程（时域角度）：

$$h_r(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_r(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[T p_{2\omega_c}(\omega)] \xrightarrow{T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{\omega_c}} = \text{Sa}(\omega_c t)$$

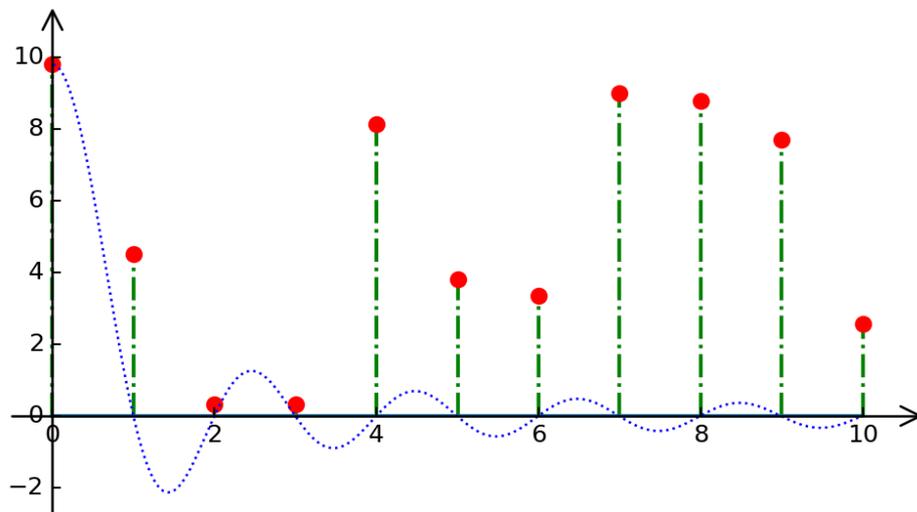
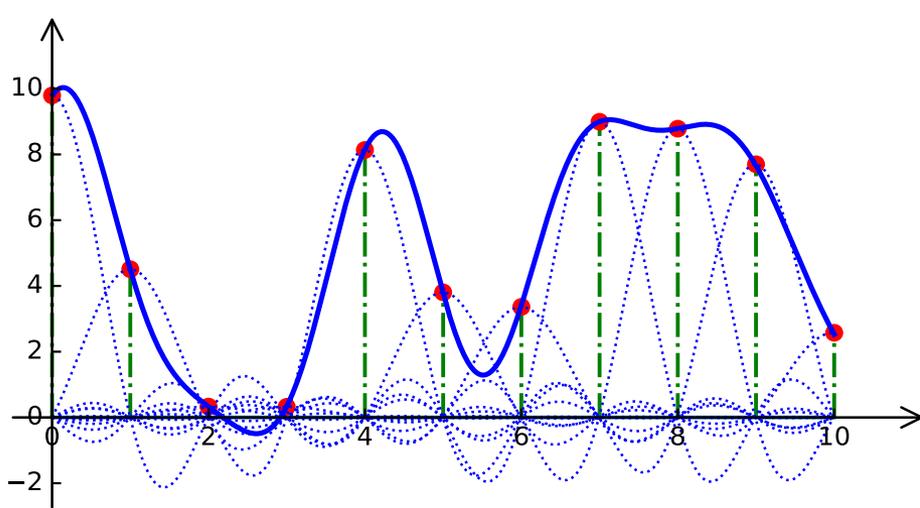
$$\begin{aligned} f(t) &= h_r(t) * f_s(t) \\ &= h_r(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \boxed{h_r(t - kT)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_r(t - kT) &= \text{Sa}\left(\frac{\omega_s}{2}(t - kT)\right) \\ &= \text{Sa}\left(\frac{\omega_s}{2}t - \pi k\right) \end{aligned}$$

6.4-3 信号的重建

内插公式：满足采样定理下信号重建

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega_s}{2}t - \pi k\right) \quad \omega_s \geq 2\omega_m$$



由采样信号恢复连续信号



本章小结

- 连续非周期信号通过系统响应的频域分析
- 连续周期信号通过系统响应的频域分析
- 无失真传输系统与理想滤波器
- 信号的采样与重建
- 学习要求：
 1. 掌握不同信号通过系统的零状态响应求解方法（从频域分析角度）
 2. 掌握无失真传输系统和理想滤波器的概念，能够对信号通过滤波器的响应进行定性分析；了解不同滤波器的作用
 3. 理解信号采样定理，尤其是带宽信号采样条件；了解信号重建过程



附：第7次作业

◆ 第208-210页：

6-2

6-3

6-6: (1)

6-14