



江苏师范大学 电气工程及其自动化学院  
JIANGSU NORMAL UNIVERSITY SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING & AUTOMATION



信号与系统

# 第7章 信号与系统的S域分析

李灿

| 12#503A

| [lic@jsnu.edu.cn](mailto:lic@jsnu.edu.cn)

| <https://sslic.cn/ss>





# 本章主要内容

- 连续时间**信号**的复频域分析
- 连续时间**LTI**系统响应的复频域分析
- 连续时间**LTI**系统的**传递函数**与**系统特性**



# §7.1 连续时间信号的复频域分析



## □ 频域分析方法的不足：

- 某些信号不存在**Fourier**变换
- 只有稳定系统才可由系统的频率响应  $H(j\omega)$  进行描述



## □ 复频域（**S**域）分析

**Fourier**变换



**Laplace**变换



## 7.1-1 Laplace变换

□ Fourier变换存在的充分条件：信号 $f(t)$ 满足Dirichlet条件

1. 绝对可积，即  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

2. 任意区间，信号仅含有限个最大值和最小值

3. 任意区间，信号仅含有限个间断点，间断点信号值有界

单位阶跃信号： $u(t)$   $\int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = \infty$  Dirichlet条件 ✘

Fourier变换存在，但难以由定义求出

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



## 7.1-1 Laplace变换

□ Fourier变换存在的充分条件：信号 $f(t)$ 满足Dirichlet条件

1. 绝对可积，即  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

指数增长信号： $f(t) = e^{\alpha t} u(t), \alpha > 0$

Dirichlet条件 ✘

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \infty$$

Fourier变换不存在！



# 7.1-1 Laplace变换

指数增长信号:  $f(t) = e^{\alpha t} u(t), \alpha > 0$

Dirichlet条件 ✘

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \infty$$

Fourier变换不存在!



乘以指数衰减因子

$$e^{-\sigma t}, \sigma > \alpha$$

$$f(t)e^{-\sigma t} = e^{-(\sigma-\alpha)t} u(t), \sigma - \alpha > 0$$

$$\text{Re}(s) = \sigma > \alpha$$

$$\mathcal{F} \left[ e^{-(\sigma-\alpha)t} u(t) \right] = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega-\alpha)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}$$



# 7.1-1 Laplace变换

一般信号： $f(t)$



乘以指数衰减因子

$e^{-\sigma t}$ , 适当的  $\sigma$ .

$$\mathcal{F} [f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad \text{Fourier变换存在!}$$



$s = \sigma + j\omega$ ,  $\text{Re}(s) > ?$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

## Laplace正变换

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s = \sigma + j\omega$$



# 7.1-1 Laplace变换

信号  $f(t)e^{-\sigma t}$  的Fourier反变换

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega$$

  $s = \sigma + j\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$



## 7.1-1 Laplace变换

信号  $f(t)e^{-\sigma t}$  的Fourier反变换

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega$$

↓  $s = \sigma + j\omega$

### Laplace反变换

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

□ 物理意义：信号  $f(t)$  可分解为复指数信号  $e^{st}$  的线性组合



# 7.1-1 Laplace变换

□ Laplace变换符号： $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

□ 单边Laplace变换

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

为何取 $0^-$

- 0时刻可能包含冲激信号
- 便于由S域分析系统的零输入响应



# 7.1-2 单边Laplace变换的收敛域

一般信号： $f(t)$



乘以指数衰减因子

$$e^{-\sigma t}$$

适当的  $\sigma$ .

$$\mathcal{F} [f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

Fourier变换存在

充分条件： $f(t)e^{-\sigma t}$  绝对可积

$$\mathcal{L} [f(t)] = \mathcal{F} [f(t)e^{-\sigma t}]$$

单边信号： $f(t)$

$$\text{Re}(s) > \sigma_0$$

若存在  $\sigma_0$ ，当  $\sigma > \sigma_0$  时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$$

弱增长条件  $|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}$

## 7.1-2 单边Laplace变换的收敛域

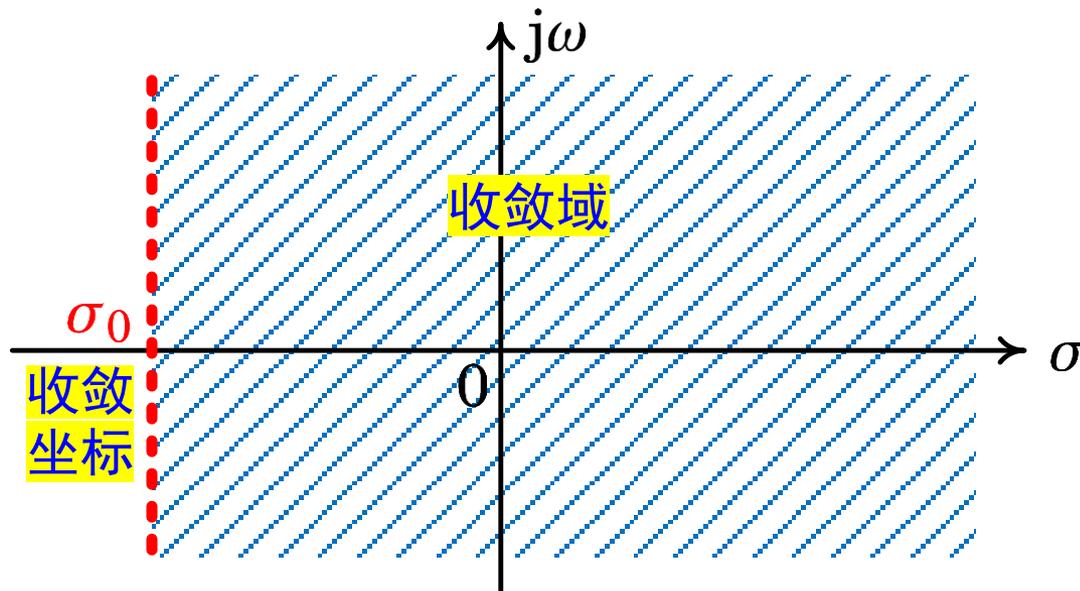
□ 单边信号  $f(t)$  的Laplace变换存在：

若存在  $\sigma_0$ ，当  $\sigma > \sigma_0$  时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$$

充分条件： $f(t)e^{-\sigma t}$  绝对可积

$$\text{Re}(s) > \sigma_0$$



单边Laplace变换的收敛域



弱增长条件  $|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}$

【例】 计算下列信号单边Laplace变换的收敛域

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$$

(1)  $u(t) - u(t - 2)$                        $\text{Re}(s) > -\infty$

---

(2)  $u(t)$                                        $\text{Re}(s) > 0$

---

(3)  $\sin(\omega_0 t)u(t)$                        $\text{Re}(s) > 0$

---

(4)  $tu(t), t^n u(t)$                        $\text{Re}(s) > 0$

---

(5)  $e^{3t}u(t)$                                    $\text{Re}(s) > 3$

---

(6)  $t^t u(t), e^{t^2} u(t)$                        $\text{ROC} = \emptyset$

---



## 7.1-2 单边Laplace变换的收敛域

□ 单边信号Laplace变换收敛域总结：

信号类型（特征）	收敛域
1. 时限能量信号	$\text{Re}(s) > -\infty$
2. 等幅或等幅振荡信号，如 $\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\text{Re}(s) > 0$
3. 时间正幂次增长信号，如 $t^n u(t)$	$\text{Re}(s) > 0$
4. 指数增长信号，如 $e^{\alpha t} u(t)$ , $\alpha > 0$	$\text{Re}(s) > \alpha$
5. 含有非指数阶函数的信号，如 $t^t u(t)$	Laplace变换不存在
<b>指数阶函数：</b> 满足当 $\sigma > \sigma_0$ 时， $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ 的函数	



## 7.1-3 常用信号的单边Laplace变换

1. 单边指数信号:  $f(t) = e^{\lambda t} u(t), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\lambda t} u(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-\lambda)t} dt \\ &= \frac{1}{s-\lambda}, \quad \text{Re}(s) > \lambda \end{aligned}$$

特例:  $\lambda = 0$

$$f(t) = u(t)$$

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$e^{\lambda t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-\lambda}, \quad \text{Re}(s) > \lambda$$



## 7.1-3 常用信号的单边Laplace变换

1. 单边指数信号:  $f(t) = e^{\lambda t} u(t), \lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - \lambda}, \operatorname{Re}(s) > \lambda$$

$$e^{j\omega_0 t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - j\omega_0}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$e^{s_0 t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s - s_0}, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$$



## 7.1-3 常用信号的单边Laplace变换

2. 正弦信号:  $f(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}u(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}(s) > 0\end{aligned}$$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}(s) > 0$$



## 7.1-3 常用信号的单边Laplace变换

2. 正弦信号:  $f(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}(s) > 0$$



## 7.1-3 常用信号的单边Laplace变换

3. 单位冲激信号及其导数： $f(t) = \delta(t)$ ,  $f'(t) = \delta'(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt \\ &= \mathbf{1}, \quad \text{Re}(s) > -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta'(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} \delta'(t)e^{-st} dt \\ &= -[e^{-st}]' \Big|_{s=0} = \mathbf{s}, \quad \text{Re}(s) > -\infty\end{aligned}$$

$$\delta(t), \delta'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1, s, \text{Re}(s) > -\infty$$



## 7.1-3 常用信号的单边Laplace变换

4. 时间正幂次信号:  $f(t) = t^n u(t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t^n u(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} t^n e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} t^n de^{-st} \\
 &= -\frac{1}{s} t^n e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{n}{s} \int_{0^-}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\
 &= \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1} u(t)] \\
 &= \dots \\
 &= \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}[t^0 u(t)] \\
 &= \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{Re}(s) > 0
 \end{aligned}$$

$$t^n u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{Re}(s) > -\infty$$



## 7.1-4 单边Laplace变换的性质

线性

展缩

时移

卷积

乘积

微分

积分

指数加权

线性加权

初值定理

终值定理



# 7.1-4 单边Laplace变换的性质

时移

微分

积分

初值定理

终值定理



# 7.1-4 单边Laplace变换的线性特性与展缩特性

## 1. 线性特性

$$f_1(t); f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_1; F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$$

$$af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aF_1(s) + bF_2(s), \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

## 2. 展缩特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0, \operatorname{Re}(s) > a\sigma_0$$



## 7.1-4 单边Laplace变换的时移特性

### 3. 时移特性（右移）

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)e^{-st_0}, t_0 \geq 0, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_{0^-}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \cdot e^{-st_0} = F(s)e^{-st_0} \end{aligned}$$



## 7.1-4 单边Laplace变换的时移特性

【例】求图示三角脉冲信号的单边Laplace变换

解：  $f(t) = 2r(t-1) - 3r(t-2) + r(t-4)$

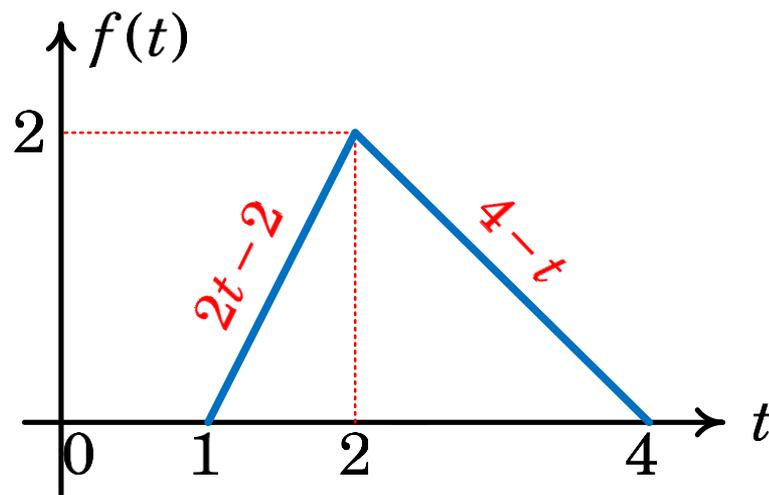
$$= 2(t-1)u(t-1) - 3(t-2)u(t-2) + (t-4)u(t-4)$$



$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2}, \text{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2e^{-s} - 3e^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2}$$

$$\text{Re}(s) > -\infty$$





## 7.1-4 单边Laplace变换的时移特性

【例】已知  $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ ，求如下信号的Laplace变换：

$$f_1(t) = \sin[\omega_0(t - t_0)]u(t - t_0) \quad f_2(t) = \sin[\omega_0(t - t_0)]u(t)$$

解：

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} e^{-st_0} \quad \text{Re}(s) > 0$$

时移特性

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \sin[\omega_0(t - t_0)]u(t) \\ &= [\sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t_0) - \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_0)] \cdot u(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cos(\omega_0 t_0) - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \sin(\omega_0 t_0)$$

对于非因果信号： $\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)] \neq \mathcal{L}[f(t - t_0)u(t)]$



# 7.1-4 单边Laplace变换的卷积特性与乘积特性

## 4. 卷积特性

$$f_1(t); f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_1; F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$$

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

## 5. 乘积特性

$$f_1(t); f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_1; F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_2$$

$$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_1 + \sigma_2$$



【例】 已知  $f_1(t) = e^{-\lambda t}u(t)$ ,  $f_2(t) = u(t)$ , 求  $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$

解: 
$$F_1(s) = \mathcal{L}[e^{-\lambda t}u(t)] = \frac{1}{s + \lambda}, \quad \text{Re}(s) > -\lambda$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= F_1(s)F_2(s) \quad \text{积分特性} \\ &= \frac{1}{s(s + \lambda)}, \quad \text{Re}(s) > \max(-\lambda, 0) \end{aligned}$$



## 7.1-4 单边Laplace变换的指数加权特性

### 6. 指数加权特性（S域平移特性）

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$$e^{-\lambda t} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s + \lambda), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 - \lambda$$

### 7. 线性加权特性（S域微分特性）

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$$-t f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF(s)}{ds}, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

收敛域可能变大



【例】已知  $F(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ,  $\text{Re}(s) > 0$ , 计算  $\mathcal{L}[e^{-\lambda t} t u(t)]$

解:  $\mathcal{L}[t u(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$  线性加权特性

$$= \frac{1}{s^2}$$

$$:= F_1(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t} t u(t)] = F_1(s + \lambda)$$

指数加权特性

$$= \frac{1}{(s + \lambda)^2},$$

$$\text{Re}(s) > -\lambda$$



# 7.1-4 单边Laplace变换的微分特性

## 8. 时域微分特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

收敛域可能变大

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} df(t) \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0^-) + sF(s) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} [\mathcal{L}[f''(t)] + s f(0^-) + f'(0^-)]$$



# 7.1-4 单边Laplace变换的积分特性

## 9. 积分特性

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s) + \boxed{\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau}, \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_0, 0)$$

收敛域可能变小

$$\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s), \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_0, 0)$$



【例】已知  $F(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ,  $\text{Re}(s) > 0$ , 计算  $\mathcal{L}[\delta(t)]$ ,  $\mathcal{L}[\delta'(t)]$

解:  $\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}[u'(t)]$  微分特性

$$= s \mathcal{L}[u(t)] - u(0^-)$$

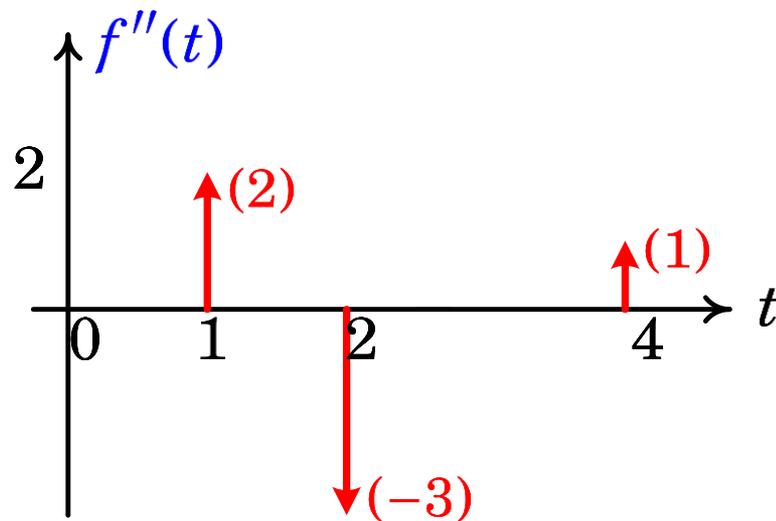
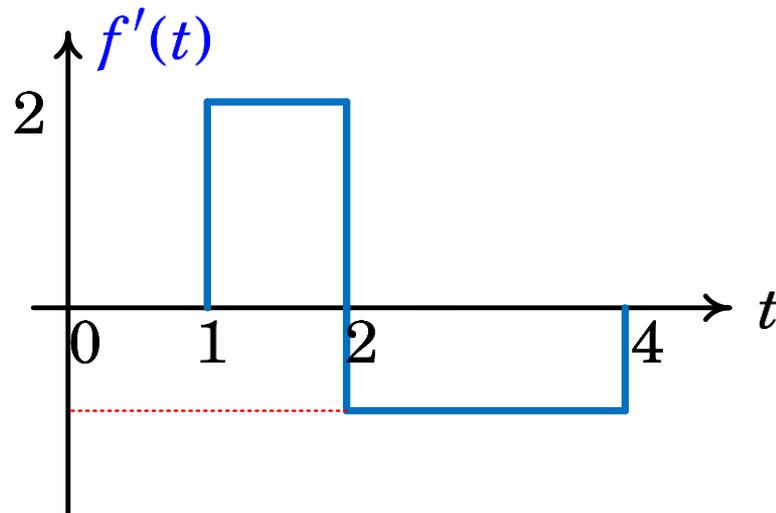
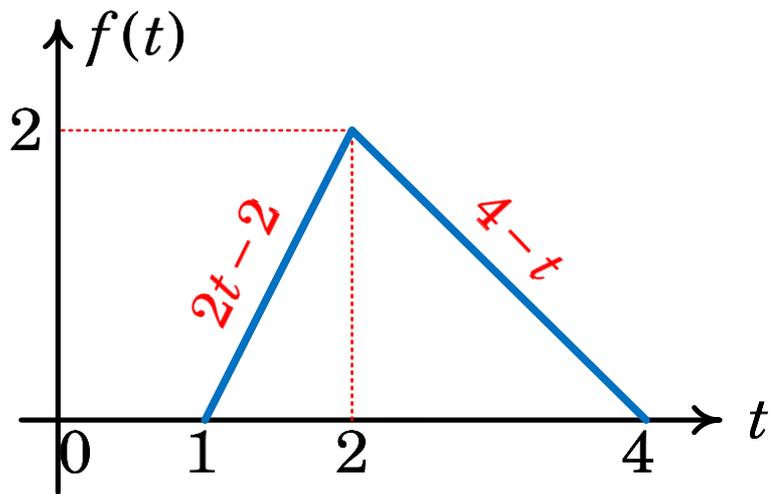
$$= 1, \quad \text{Re}(s) > -\infty$$

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = s \mathcal{L}[\delta(t)] - \delta(0^-)$$
 微分特性

$$= s, \quad \text{Re}(s) > -\infty$$



【例】利用时域微分特性计算图示三角脉冲的单边Laplace变换



解:  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \text{Re}(s) > -\infty$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f''(t)]$$

$$= \frac{2e^{-s} - 3e^{-2s} + e^{-4s}}{s^2}$$

# 7.1-4 单边Laplace变换的初值定理与终值定理

## 10. 初值定理

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$f(t)$  在  $t = 0$  不包含冲激及其各阶导数

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

证明:  $sF(s) - f(0^-) = \mathcal{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$

$$= \int_{0^-}^{0^+} f'(t)e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

直接取极限?

$$= f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{0^+} + s \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

# 7.1-4 单边Laplace变换的初值定理与终值定理

## 10. 初值定理

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

频域如何  
判断

$f(t)$  在  $t = 0$  不包含冲激及其各阶导数

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

证明:  $sF(s) - f(0^-) = \boxed{f(0^+) - f(0^-)} + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$

$$\Rightarrow sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$



# 7.1-4 单边Laplace变换的初值定理与终值定理

## 10. 终值定理

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

$sF(s)$  的收敛域包括  $j\omega$  轴 ..

稳态误差  
计算

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

证明:

$$sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) &= f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= f(0^+) + f(\infty) - f(0^+) \end{aligned}$$



【例】 已知  $F(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ ,  $\text{Re}(s) > 0$ , 求  $f(t)$  的初值和终值

解： 真分式，不存在冲激信号及其导数

利用初值定理：

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+2} = 0$$

$sF(s)$  的收敛域为  $\text{Re}(s) > -2$ , 包含  $j\omega$  轴

利用终值定理：

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

$$sF(s) = \frac{1}{s+2}$$



【例】已知  $F(s) = \frac{s}{s+1}$ ,  $\text{Re}(s) > -1$ , 求  $f(t)$  的初值和终值

解：① 不是真分式，先分解为真分式

$$F(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} = 1 + F_1(s)$$

利用初值定理：

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F_1(s) = - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+1} = -1$$

时域验证：

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[1] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= \delta(t) - e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(0^+) = -1$$



**【例】** 已知  $F(s) = \frac{s}{s+1}$ ,  $\text{Re}(s) > -1$ , 求  $f(t)$  的初值和终值

**解:** ① 不是真分式, 先分解为真分式

$$F(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} = 1 + F_1(s)$$

利用初值定理:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F_1(s) = - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+1} = -1$$

②  $sF(s)$  的收敛域为  $\text{Re}(s) > -1$ , 包含  $j\omega$  轴

利用终值定理:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s+2} = 0$$



## 7.1-4 单边Laplace变换的性质

### □ 性质使用说明：

➤ **收敛域**可能发生变化，具体看**极点的增减**、基于时域的判敛条件

- 增加极点，收敛域变小
- 消去极点，收敛域变大

• 时域下，直接利用  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$  弱增长条件  $|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}$

➤  $F(s)$ 为假分式，先化为**整式**与**真分式**之和，再对真分式部分使用**初值定理**求  $f(0^+)$

- 整式部分必为**常数**或  $s$  的幂次项，对应冲激信号及其各阶导数的Laplace变换



## 单边Laplace变换的基本性质

线性	$af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aF_1(s) + bF_2(s), \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$
展缩	$f(at), a > 0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \operatorname{Re}(s) > a\sigma_0$
 时移	$f(t-t_0)u(t-t_0), t_0 \geq 0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}F(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$
 卷积	$f_1(t)*f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$
乘积	$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \sigma_1 + \sigma_2$
指数加权	$e^{-\lambda t}f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s+\lambda), \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 - \lambda$
线性加权	$-tf(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF(s)}{ds}, \operatorname{Re}(s) > \sigma_0$

## 单边Laplace变换的基本性质(续)

微分	$f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-), \text{Re}(s) > \sigma_0$	
	$f''(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-), \text{Re}(s) > \sigma_0$	
积分	$\int_{0^-}^t f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}F(s), \text{Re}(s) > \max(\sigma_0, 0)$	
	$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau + \frac{1}{s}F(s), \text{Re}(s) > \max(\sigma_0, 0)$	
初值	零时刻不包含冲激及其各阶导数	$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
终值	$sF(s)$ 的收敛域包括 $j\omega$ 轴	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

➤ 注意收敛域变化和使用条件



## 7.1-5 单边Laplace反变换

### □ 单边Laplace反变换

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

积分路径必须在收敛域内

### □ 计算方法：

1. 部分分式展开法（仅适用于 $F(s)$ 为有理分式）
2. 留数法（从定义出发 + 留数定理）



# 7.1-5 单边Laplace反变换：部分分式展开法

□ 有理分式（多项式之商）

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

□ 有理真分式 ( $m < n$ )

Heaviside展开定理

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_n)}$$

$$= \underbrace{\frac{k_1}{(s - p_1)^1} + \frac{k_2}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{k_r}{(s - p_1)^r}}_{r \text{重根}} + \underbrace{\frac{k_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n}}_{\text{单根}}$$

# 7.1-5 单边Laplace反变换：部分分式展开法

□ 有理真分式 ( $m < n$ )

Heaviside展开定理

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)^1} + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}$$

$$k_r = (s-p_1)^r \cdot F(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$k_{r-1} = \frac{d}{ds} [(s-p_1)^r \cdot F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$k_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s-p_1)^r \cdot F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$k_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s-p_1)^r \cdot F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$k_i = (s-p_i) \cdot F(s) \Big|_{s=p_i}$$

$$i = r+1, \dots, n$$

# 7.1-5 单边Laplace反变换：部分分式展开法

□ 有理真分式 ( $m < n$ )

Heaviside展开定理

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)^1} + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n}$$

$$f(t) = \left[ \sum_{j=1}^r \frac{k_j}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_1 t} \right] u(t) + \left[ \sum_{i=r+1}^n k_i e^{p_i t} \right] u(t)$$

↓ 如  $r=3$

$$k_1 + k_2 t + k_3 \frac{t^2}{2!}$$

## 7.1-5 单边Laplace反变换：部分分式展开法

□ 有理真分式 ( $m < n$ )

Heaviside展开定理

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)^1} + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}$$

$$f(t) = \left[ \sum_{j=1}^r \frac{k_j}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_1 t} \right] u(t) + \left[ \sum_{i=r+1}^n k_i e^{p_i t} \right] u(t)$$

□ 有理假分式 ( $m \geq n$ )

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \underbrace{B_0 + B_1 s + \cdots + B_{m-n} s^{m-n}}_{\text{冲激+冲激各阶导数}} + \frac{N_1(s)}{D_s}$$

冲激+冲激各阶导数

真分式



## 【例】用部分分式展开法求下列 $F(s)$ , $\text{Re}(s) > 0$ 的单边Laplace反变换

$$\textcircled{1} \quad F(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1 = sF(s) \Big|_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$k_2 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$k_3 = (s+3)F(s) \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

$$F(s) = \frac{2/3}{s} + \frac{-1/2}{s+1} + \frac{-1/6}{s+3}$$

$$f(t) = \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$



【例】用部分分式展开法求下列  $F(s)$ ,  $\text{Re}(s) > 0$  的单边Laplace反变换

$$\textcircled{2} \quad F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{(s+1)^2} + \frac{k_4}{(s+1)^3}$$

$$k_1 = sF(s) \Big|_{s=0} = -2$$

$$k_4 = (s+1)^3 F(s) \Big|_{s=-1} = 3$$

$$k_3 = \frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)] \Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 F(s)] \Big|_{s=-1} = 2$$

$$F(s) = \frac{-2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^3}$$

$$f(t) = -2u(t) + 2e^{-t}u(t) + 2te^{-2t}u(t) + \frac{3}{2}t^2e^{-t}u(t)$$



**【例】** 用部分分式展开法求下列  $F(s)$ ,  $\text{Re}(s) > 0$  的单边Laplace反变换

$$\textcircled{3} \quad F(s) = \frac{s^4 - 13s^2 - 11s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s} = s - 4 + \frac{s + 2}{s^3 + 4s + 3s}$$

$$f(t) = \delta'(t) - 4\delta(t) + \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$



【例】求  $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)}$ ,  $\text{Re}(s) > 0$  的单边Laplace反变换

解:  $F(q) = \frac{1}{q(q+4)} = \frac{k_1}{q} + \frac{k_2}{(q+4)}$

$$k_1 = qF(q) \Big|_{q=0} = \frac{1}{4}$$
$$k_2 = (q+4)F(q) \Big|_{q=-4} = -\frac{1}{4}$$


$$F(s) = \frac{1/4}{s^2} + \frac{-1/4}{s^2 + 4}$$


$$f(t) = \frac{1}{4}tu(t) - \frac{1}{4}\sin(2t)u(t)$$



## 7.1-5 单边Laplace反变换：留数法

□ 真分式 ( $m < n$ )  $F(s)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{s=p_i} [F(s)e^{st}] \cdot u(t)$$

➤ 单极点的留数

$$\operatorname{Res}_{s=p_i} [F(s)e^{st}] = [(s-p_i)F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i}$$

➤ 重极点的留数 ( $r$ 重)

$$\operatorname{Res}_{s=p_i} [F(s)e^{st}] = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s-p_i)^r F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i}$$



【例】用留数法求  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)^2}$  的单边Laplace反变换

解：单极点  $s_1 = 0, s_2 = -1$       重极点  $s_3 = -3$

$$\text{Res}_{s=0} [F(s)e^{st}] = [(s-0)F(s)e^{st}] \Big|_{s=0} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Res}_{s=-1} [F(s)e^{st}] = [(s+1)F(s)e^{st}] \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4}e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=-3} [F(s)e^{st}] &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} [(s+3)^2 F(s)e^{st}] \Big|_{s=-3} \\ &= \frac{1}{36}e^{-3t} - \frac{1}{6}te^{-3t} \end{aligned}$$

$$f(t) = \left[ \frac{2}{9} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{36}e^{-3t} - \frac{1}{6}te^{-3t} \right] u(t)$$

# 7.1-6 双边Laplace变换

因果信号的双边Laplace变换和单边Laplace变换相同！

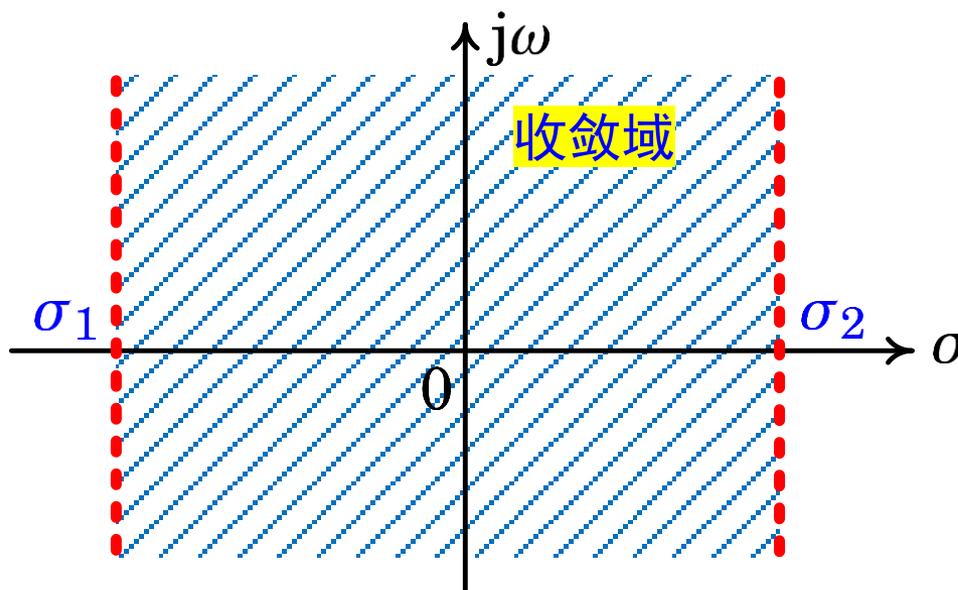
存在性条件

弱增长条件

$$|f(t)| \leq C e^{\gamma t}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0, & \sigma > \sigma_1 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0, & \sigma < \sigma_2 \end{cases}$$

$$\sigma_1 < \sigma_2$$



双边Laplace变换的收敛域



【练习】已知某信号  $f(t)$  的 Laplace 变换为

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

-  求信号的初值  $f(0^+)$  和终值  $f(\infty)$ ;
-  求  $F(s)$  的 Laplace 反变换。



## § 7.2 连续时间LTI系统响应的复频域分析



## 7.2-1 微分方程的复频域求解

### □ 因果连续时间LTI系统

$$\begin{aligned} & a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned}$$

初始状态  $y(0^-), y'(0^-), \cdots, y^{(n-1)}(0^-)$



## 7.2-1 微分方程的复频域求解

### □ 因果连续时间LTI系统

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(t)$$

初始状态  $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$

微分特性

$$\mathcal{L} \left[ y^{(i)}(t) \right] = s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - s^{i-2} y'(0^-) - \dots - y^{(i-1)}(0^-)$$

$$\mathcal{L} \left[ f^{(j)}(t) \right] = s^j F(s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - \dots - y^{(i-1)}(0^-) \right] = \sum_{j=0}^m b_j s^j F(s)$$



# 7.2-1 微分方程的复频域求解

## 因果连续时间LTI系统

系统的完全响应，一步到位！

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - \dots - y^{(i-1)}(0^-) \right] = \sum_{j=0}^m b_j s^j F(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^n a_i \left[ s^{i-1} y(0^-) + \dots + y^{(i-1)}(0^-) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}}_{Y_x(s)} + \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} F(s)}_{Y_f(s)}$$



【例】已知因果系统  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4f'(t) + 3f(t)$ ,  $t \geq 0$  的  
 $y(0^-) = -2$ ,  $y'(0^-) = 3$ ,  $f(t) = u(t)$ , 求该系统的完全响应

解：微分方程两端进行单边Laplace变换

$$[s^2 Y(s) - s y(0^-) - y'(0^-)] + 3[s Y(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = 4s F(s) + 3F(s)$$

$$[s^2 Y(s) + 2s - 3] + 3[s Y(s) + 2] + 2Y(s) = 4s F(s) + 3F(s)$$

$$[s^2 + 3s + 2] Y(s) + 2s + 3 = [4s + 3] F(s)$$

$$Y(s) = \frac{-2s - 3}{s^2 + 3s + 2} + \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} F(s)$$



【例】已知因果系统  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4f'(t) + 3f(t)$ ,  $t \geq 0$  的

$y(0^-) = -2$ ,  $y'(0^-) = 3$ ,  $f(t) = u(t)$ , 求该系统的完全响应

解: 
$$Y(s) = \frac{-2s - 3}{s^2 + 3s + 2} + \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} F(s) = Y_x(s) + Y_f(s)$$

$$Y_x(s) = \frac{-2s - 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{-1}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2}$$

$$Y_f(s) = \frac{4s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3/2}{s} + \frac{1}{s + 1} + \frac{-5/2}{s + 2}$$

$$y_x(t) = (-e^{-t} - e^{-2t}) \cdot u(t)$$

$$y_f(t) = \left( \frac{3}{2} + e^{-t} - \frac{5}{2} e^{-2t} \right) \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \left( \frac{3}{2} - \frac{7}{2} e^{-2t} \right) \cdot u(t)$$



## 7.2-2 电路的复频域模型

### □ KVL, KCL, VCR

$$\sum v(t) = 0$$

$$\sum i(t) = 0$$

$$v_R(t) = R i_R(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$



$$\sum V(s) = 0$$

$$\sum I(s) = 0$$

$$V_R(s) = R I_R(s)$$

$$V_L(s) = sL I_L(s) - L i_L(0^-)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0^-)$$

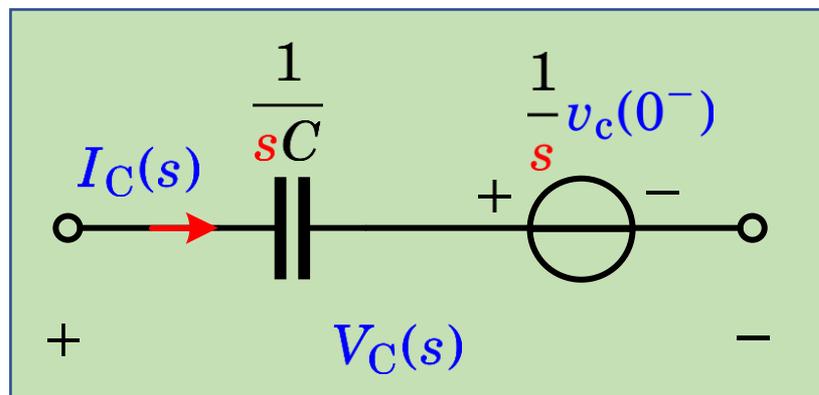
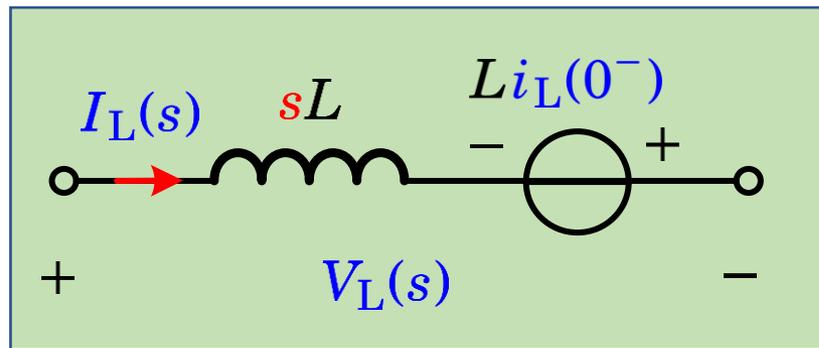
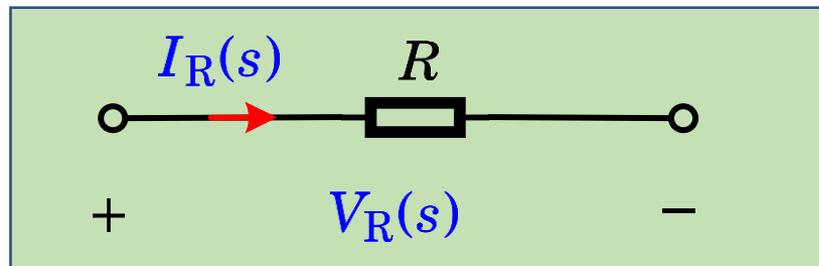


## 7.2-2 电路的复频域模型

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}v_c(0^-)$$

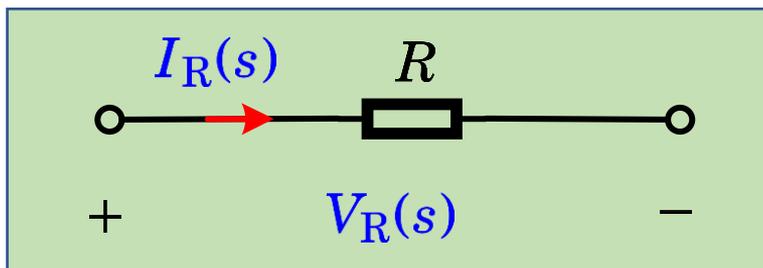
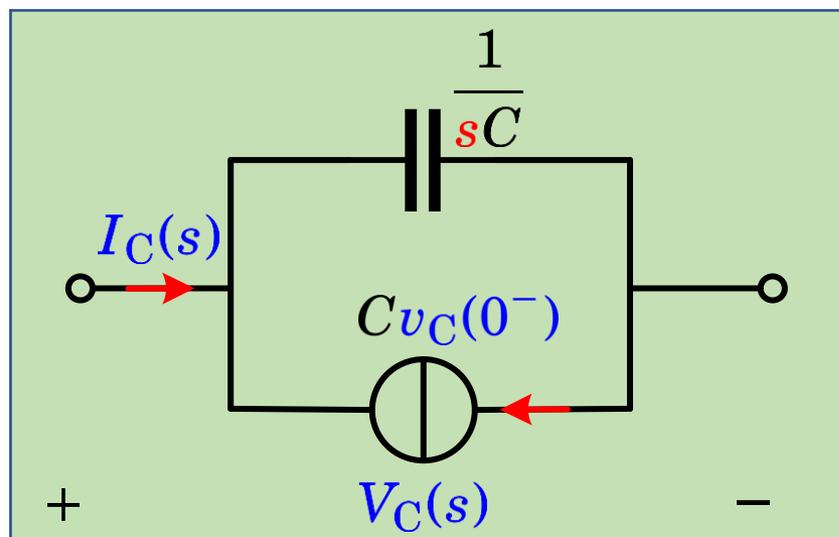
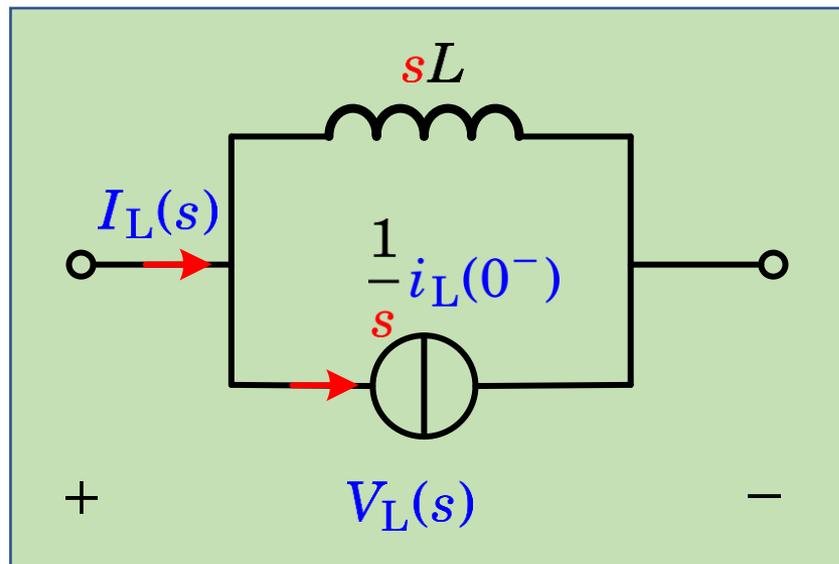


## 7.2-2 电路的复频域模型

$$I_R(s) = \frac{1}{R} V_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-)$$

$$I_C(s) = sC V_C(s) - C v_c(0^-)$$





【例】在图示电路中，电容的初始储能为  $v_C(0^-) = -E$ ，画出该电路的S域模型，并计算  $v_C(t)$

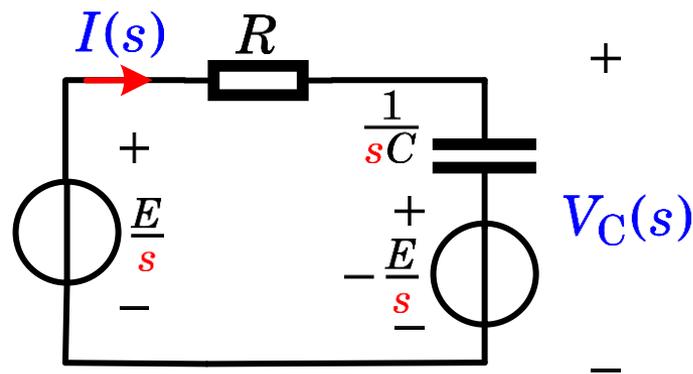
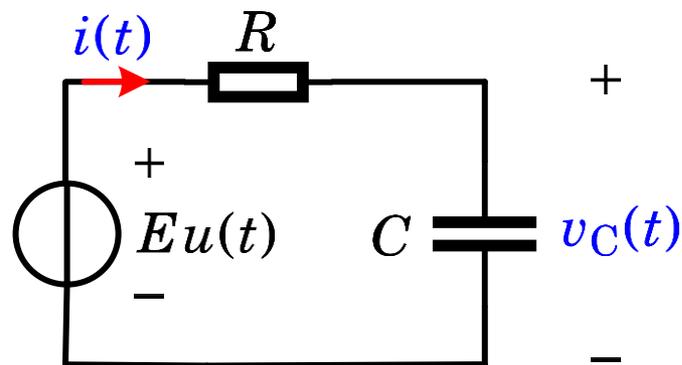
解：
$$\left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) - \frac{E}{s} - \frac{E}{s} = 0$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) - \frac{E}{s}$$

$$= \frac{\frac{2E}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} - \frac{E}{s}$$

$$= \frac{E}{s} - \frac{2E}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$v_C(t) = E \left(1 - 2e^{-\frac{1}{RC}t}\right) u(t)$$



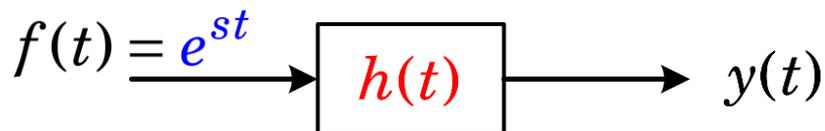


## § 7.3 LTI系统的传递函数与系统特性



## 7.3-1 传递函数

□ **传递函数**：连续时间LTI系统的复频域描述，也称**系统函数**



$$y_f(t) = f(t) * h(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

$$= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau = e^{st} H(s)$$

• **传递函数**为冲激响应的Laplace变换

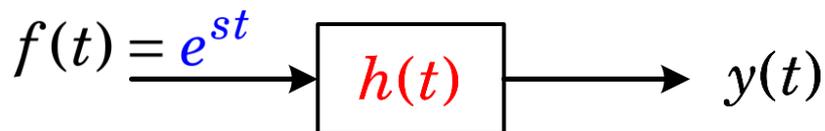
$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

• 复指数信号通过LTI系统时，零状态响应仍为同复频率的复指数信号，其幅度为输入信号的 $H(s)$ 倍

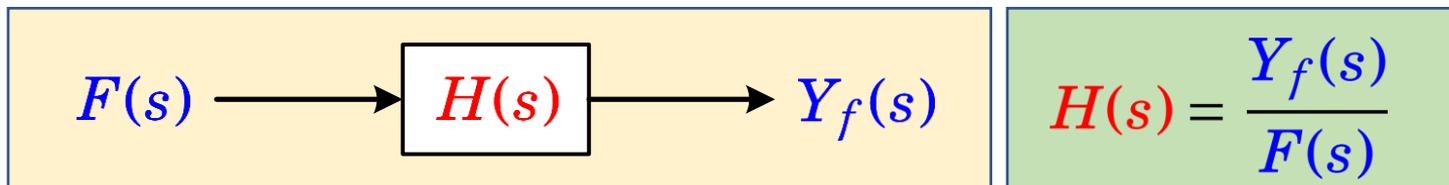


# 7.3-1 传递函数

□ **传递函数**：连续时间LTI系统的复频域描述，也称**系统函数**



$$\boxed{y_f(t) = f(t) * h(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{Y_f(s) = F(s)H(s)}$$





【例】 已知某因果连续LTI系统满足微分方程

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3f(t) + 2f'(t), t \geq 0$$

求该系统的传递函数  $H(s)$  和冲激响应  $h(t)$

解：  $(s^2 + 3s + 2)Y_f(s) = (2s + 3)F(s)$

$$H(s) = \frac{Y_f(s)}{F(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} \quad \text{Re}(s) > -1$$

$$h(t) = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$



【例】求零初始状态的理想积分器和理想微分器的传递函数  $H(s)$

解：理想积分器  $y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$        $Y(s) = \frac{1}{s} F(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0$$

理想微分器  $y(t) = \frac{df(t)}{dt}$        $Y(s) = sF(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = s \quad \text{Re}(s) > -\infty$$



# 微分方程的复频域求解 (回顾)

## 因果连续时间LTI系统

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - \dots - y^{(i-1)}(0^-) \right] = \sum_{j=0}^m b_j s^j F(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^n a_i \left[ s^{i-1} y(0^-) + \dots + y^{(i-1)}(0^-) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}}_{Y_x(s)} + \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} F(s)}_{Y_f(s)}$$

零初始条件



## 7.3-2 传递函数的零极点分布

□ **传递函数**：连续时间LTI系统的复频域描述，也称**系统函数**

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{N(s)}{D(s)} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

系统增益  
传递系数

◇ **零点**：分子多项式  $N(s) = 0$  的根  $z_j$ ，使  $H(s)$  为零

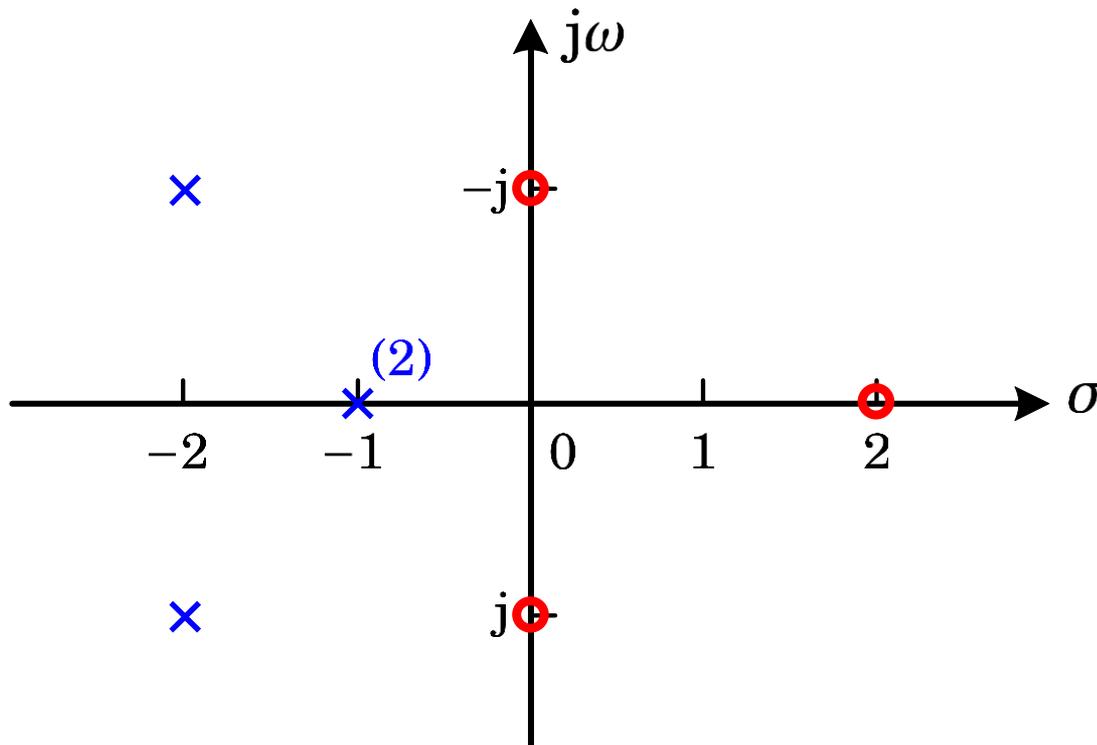
◇ **极点**：分母多项式  $D(s) = 0$  的根  $p_i$ ，使  $H(s)$  为无穷大  
微分方程的特征根



## 7.3-2 传递函数的零极点分布

□ 零极点分布图

$$H(s) = \frac{(s^2 + 1)(s - 2)}{(s + 1)^2(s + 2 - j)(s + 2 + j)}$$



## 7.3-3 传递函数与系统特性的关系：冲激响应

- 传递函数  $H(s)$  作部分分式展开（以单极点为例）

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}$$

微分方程的特征根

- 再作 Laplace 反变换

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} u(t)$$

极点作用：决定冲激响应  $h(t)$  的基本特性

零点作用：影响冲激响应  $h(t)$  各模态比重



## 7.3-3 传递函数与系统特性的关系：冲激响应

$H(s)$ 的典型极点分布与 $h(t)$ 基本特性的关系 ( $\sigma_0 > 0$ )		
左半S平面 单极点	$\frac{A}{s + \sigma_0} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Ae^{-\sigma_0 t} u(t)$	稳定
左半S平面 $r$ 重单极点	$\frac{A}{(s + \sigma_0)^r} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\sigma_0 t} u(t)$	稳定
左半S平面 共轭极点	$\frac{A}{(s + \sigma_0 - j\omega_0)(s + \sigma_0 + j\omega_0)} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{\omega_0} e^{-\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t) u(t)$	稳定
S平面虚轴 共轭极点	$\frac{A}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) u(t)$	稳定
右半S平面 单极点	$\frac{A}{s - \sigma_0} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Ae^{\sigma_0 t} u(t)$	不稳定



## 7.3-3 传递函数与系统特性的关系：频率响应

- 回顾系统的频率响应
- 对于因果系统，若  $H(s)$  的极点全部位于左半  $S$  平面，系统的频率响应

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 👉 传递函数  $H(s)$  在  $S$  平面中令  $s$  沿虚轴变化
- 👉 频率响应取决于系统的零极点分布，即

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$

可用向量法绘制  
频率响应曲线图

## 7.3-3 传递函数与系统特性的关系：稳定性

□ **定理：** 连续时间**LTI**系统稳定的**充要条件**是（回顾第3章）

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = S < \infty$$

冲激响应绝对可积



因果系统

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau = S < \infty$$

□ **定理：** 连续时间**LTI**系统稳定的**充要条件**是（复频域）

$H(s)$  的收敛域包括  $j\omega$  轴

也是渐近稳定的充要条件

传递函数的所有极点均位于左半S平面



【例】判断下列因果 LTI 系统是否稳定。

$$H_1(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \quad \checkmark$$

$$H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \times$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s} \quad \times$$

$$H_4(s) = \frac{1}{s - 2} \quad \times$$



# 本章小结

- 连续时间信号的复频域分析
- 连续时间LTI系统响应的复频域分析
- 连续时间LTI系统的传递函数与系统特性
- 学习要求：
  1. 理解从**Fourier变换**到**Laplace变换**的建立过程
  2. 掌握Laplace变换的定义及**常见信号**的Laplace变换，**收敛域**确定
  3. 熟练掌握Laplace变换的**主要性质**，并可**灵活应用**
  4. 会进行Laplace反变换的计算
  5. 掌握系统响应的复频域分析及传递函数的概念



# 附：第8次作业

## ◆ 第256-259页：

7-1: (1), (7)

7-9: (1)

7-14: (1)

7-21: (1)

7-25: 只做图(b)